

Verteilung des Geschlechts zufällig gewählter Origamis

Diplomarbeit

vorgelegt von:
Sabine Lechner

angefertigt
am Mathematischen Institut der
Albert-Ludwig-Universität Freiburg
Juni 2008

Betreuer: apl. Prof. Dr. Jan-Christoph Schlage-Puchta

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Einführung	3
1.1 Origamis	3
1.2 Kranzprodukt	6
2 Darstellungstheorie	9
2.1 Darstellungstheorie endlicher Gruppen	9
2.2 Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe	13
2.3 Darstellungstheorie des Kranzproduktes $H \wr G$	18
3 $C_4 \wr S_n$	26
3.1 Motivation	26
3.2 Wahrscheinlichkeit der Eckenanzahl	28
3.3 Verteilung des Geschlechts	35
3.4 Charakterberechnung für Elemente aus $H \wr S_n$	36
4 Origamis in der Forschung	39
4.1 Origamis als Überlagerungen des Torus	39
4.2 Origamis als Untergruppe der freien Gruppe \mathbb{F}_2 mit endlichem Index	40
4.3 Translationsstruktur, Teichmüller Kurve im Modulraum und Veech Gruppe	41
4.3.1 Translationsstruktur	41
4.3.2 Teichmüller Kurve im Modulraum	42
4.3.3 Veech Gruppe	42
Literaturverzeichnis	44

Einleitung

Es ist ein wichtiges Forschungsziel in der algebraischen Geometrie und der komplexen Differentialgeometrie, die Geometrie des Modulraums M_g der Kurven vom Geschlecht g zu verstehen. Ein Ansatz ist es, algebraische Kurven dieses Modulraums, die das Bild einer Teichmüllerkreisscheibe sind, zu untersuchen. Eine spezielle Klasse dieser Teichmüllerkurven stellen die Origamikurven dar. Ein Origami (oft auch “square tiled surface“ genannt) ist eine topologische Fläche vom Geschlecht g , die entsteht, indem man endlich viele Einheitsquadrate entlang der Kanten so verklebt, dass die resultierende Fläche kompakt und zusammenhängend ist. Durch die zu solch einer Fläche gehörende Translationsstruktur - eine komplexe Struktur, deren Übergangsfunktionen Translationen sind - erhält man eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht g , also einen Punkt im Modulraum M_g . Eine spezielle Form von Origamis wurde schon von W. Thurston in seiner Arbeit über die Diffeomorphismen von Flächen in [Thu88] definiert, die dann später von W. Veech in [Vee89] wieder aufgenommen wurde.

In der vorliegenden Arbeit wird das Ziel verfolgt, die Verteilung des Geschlechts g , ermittelt mit Hilfe der Eulerschen Formel $\chi = E - K + F$, der durch ein Origami entstehenden Fläche X , zu berechnen. Die Idee ist hierbei, die Anzahl der Ecken E von X über die Anzahl der Bahnen der Operation

$$\begin{aligned}\phi : \langle \sigma\tau \rangle \times ([4] \times [n]) &\rightarrow ([4] \times [n]) \\ \phi((\sigma\tau)^k, (i, j)) &= (\tilde{\pi}^k(i), (f_k)_{\tilde{\pi}^k(i)}(j))\end{aligned}$$

mit σ und $\tau \in C_4 \wr S_n$ zu berechnen. Hierfür werden in Kapitel 1 zunächst die grundlegenden Begriffe zu Origamis und zum Kranzproduktes (bezeichnet mit \wr) eingeführt. Die Wahrscheinlichkeit wird mit Hilfe der Formel

$$P(\#\text{Bahnen} = k) = \sum_{\pi: \pi' \text{ hat } k \text{ Zykel}} P(\sigma\tau = \pi) = \frac{1}{|C_4 \wr S_n|} \sum_D \frac{\chi^D(\sigma)\chi^D(\tau)\chi^D(\pi)}{\chi^D(1)}$$

berechnet, wobei $\pi = (\tilde{\pi}; \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \in C_u \wr S_n$, $\pi' = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 \circ \pi_4$ und die Summe über alle irreduziblen Darstellungen D von $C_4 \wr S_n$ läuft. Die dafür nötigen Kenntnisse der

Darstellungstheorie werden in Kapitel 2 behandelt. In Kapitel 3 wird die Idee und die vorangegangene Theorie zusammengeführt, um die Verteilung des Geschlechts zu berechnen. Kapitel 4 soll einen kurzen Einblick geben, womit sich die Forschung rund um Origamis gerade beschäftigt.

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, die mir bei der Abfassung dieser Arbeit geholfen haben. Mein besonderer Dank gilt dabei Herrn apl. Prof. Dr. Jan-Christoph Schlage-Puchta, der mich an ein reizvolles Teilgebiet der Mathematik herangeführt hat. Zu großem Dank bin ich auch der Arbeitsgruppe Origamis in Karlsruhe verpflichtet, die mir die Möglichkeit gab, über mein Diplomarbeitsthema auf ihrem Weihnachtsworkshop zur (algebraischen) Geometrie und Zahlentheorie vorzutragen.

Kapitel 1

Einführung

1.1 Origamis

Origamis lassen sich auf verschiedene Weisen beschreiben, am anschaulichsten ist jedoch die folgende Definition.

Definition 1.1.1

Ein *Origami* erhält man durch die Verklebung endlich vieler Kopien des euklidischen Einheitsquadrates. Diese Verklebungen richten sich nach den folgenden Regeln:

- Jede rechte Kante wird mit einer linken Kante verklebt.
- Jede obere Kante wird mit einer unteren Kante verklebt.
- Die so entstehende abgeschlossene Fläche X ist zusammenhängend.

Die Namensgebung Origami geht zurück auf Pierre Lochak. In seiner Arbeit [Loc05] verwendet er erstmals den Begriff Origami, um eine Konstruktion W. Thurstons in [Thu88] und deren Verallgemeinerung durch W. Veech in [Vee89] zu beschreiben. Dabei sei bemerkt, dass es sich bei diesen mathematischen Objekten keinesfalls um die gleichnamige japanische Papierfaltkunst handelt.

Beispiel 1.1.2

- a) Das einfachste Beispiel ist ein Origami, welches nur aus einer Kopie des euklidischen Einheitsquadrates besteht. Denn dafür gibt es genau eine Verklebemöglichkeit, die den obigen Regeln entspricht. Man erhält einen Torus T . Dieses Origami heißt triviales Origami O_0 und hat Geschlecht $g=1$.



Abb. 1: Das triviale Origami O_0 . Gegenüberliegende Kanten werden verklebt.

- b) Das Origami bestehend aus zwei Kopien des euklidischen Einheitsquadrates mit den in Abbildung 2 angegebenen Verklebungen heißt O_1 und hat ebenfalls Geschlecht $g=1$.

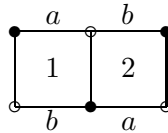


Abb.2: Das Origami O_1 . Kanten mit der selben Beschriftung und gegenüberliegende Kanten werden verklebt.

- c) Das Origami bestehend aus fünf Kopien des euklidischen Einheitsquadrates mit den in Abbildung 3 angegebenen Verklebungsvorschriften heißt D . Man erhält in diesem Fall drei Identifikationsklassen von Ecken. Mit Hilfe der Eulerschen Charakteristik berechnet man für die entstandene Fläche X das Geschlecht $g=2$.

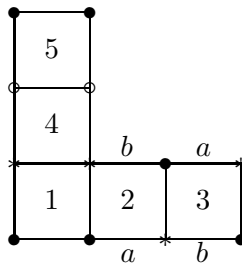


Abb.3: Das Origami D . Kanten mit der selben Beschriftung und gegenüberliegende Kanten werden verklebt.

Weitere Möglichkeiten, Origamis zu beschreiben, findet man in [Sch07]. Dort werden unter anderem die folgenden Beschreibungen eingeführt:

- Als Überlagerungen des Torus, die höchstens über einem Punkt verzweigen.
- Als Paare von Permutationen in S_n , die gewisse Bedingungen erfüllen.
- Als Untergruppen der freien Gruppe \mathbb{F}_2 mit endlichem Index.

Für die vorliegende Arbeit wird vor allem die in Punkt zwei angesprochene Definition verwendet. Die weiteren werden später in Kapitel 4 noch einmal aufgegriffen.

Definition 1.1.3

Ein *Origami* O bestehend aus n Kopien des euklidischen Einheitsquadrates wird definiert durch zwei Permutationen σ_a und σ_b in S_n , wobei σ_a und σ_b induzieren, wie die vertikalen bzw. horizontalen Kanten verklebt werden.

BERMERKUNG:

Wählt man zwei beliebige Permutationen σ_a und $\sigma_b \in S_n$, so zeigt das folgenden Lemma, dass das Erzeugnis $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$ der Permutationen transitiv auf n operiert. Diese Voraussetzung ist nötig, um eine zusammenhängende Fläche zu erhalten.

Lemma 1.1.4

Für $n \rightarrow \infty$ und $\sigma_a, \sigma_b \in S_n$ operiert $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$ transitiv.

Beweis: Es gilt, dass zwei beliebig gewählte Elemente der alternierenden Gruppe A_n diese mit Wahrscheinlichkeit $\rightarrow 1$ erzeugen, falls $n \rightarrow \infty$. Dies folgt aus Dixons Vermutung von 1969 und deren Beweis durch Dixon selbst [Dix69], Kantor und Lubotzky [KL90] und Liebeck und Shalev [LS95]. Weiterhin gilt nach [Wie64], dass A_n $(n-2)$ -fach transitiv ist, das heißt es existiert zu je zwei Folgen a_1, \dots, a_{n-2} und b_1, \dots, b_{n-2} aus $\{1, 2, \dots, n\}$ von je $n-2$ verschiedenen Elementen eine Permutation $\sigma \in A_n$, so dass $\sigma(a_1) = b_1, \dots, \sigma(a_{n-2}) = b_{n-2}$. Insbesondere ist A_n , für $n \geq 3$, einfach transitiv, woraus die Aussage des Lemmas folgt. \square

Definition 1.1.5

Zwei Origamis O und O' heißen *äquivalent*, falls die beiden Paare (σ_a, σ_b) und (σ'_a, σ'_b) in S_n äquivalent sind. Das heißt, falls ein $s \in S_n$ existiert, so dass $\sigma_a = s\sigma'_a s^{-1}$ und $\sigma_b = s\sigma'_b s^{-1}$.

Beispiel 1.1.6

In Beispiel 1.1.2 b) erhält man für das Origami O_1 die Permutationen $\sigma_a = (12)$ und

$\sigma_b = (12)$ in S_2 .

Für das Origami D in c) erhält man die Permutationen $\sigma_a = (123)$ und $\sigma_b = (145)(23)$ in S_5 . Die anschauliche Bedeutung von σ_a ist, dass

1. die rechte Kante des ersten Quadrates mit der linken des zweiten Quadrates,
2. die rechte Kante des zweiten Quadrates mit der linken des dritten Quadrates und
3. die rechte Kante des dritten Quadrates mit der linken des ersten Quadrates

identifiziert werden soll.

Der Zykel (145) in σ_b bedeutet, dass

1. die obere Kante des ersten Quadrates mit der unteren des vierten Quadrates,
2. die obere Kante des vierten Quadrates mit der unteren des fünften Quadrates und
3. die obere Kante des fünften Quadrates mit der unteren des ersten Quadrates

identifiziert werden soll.

Und der Zykel (23) in σ_b bedeutet, dass

1. die obere Kante des zweiten Quadrates mit der unteren des dritten Quadrates und
2. die obere Kante des dritten Quadrates mit der unteren des zweiten Quadrates

identifiziert werden soll.

1.2 Kranzprodukt

Definition 1.2.1

Sei G eine Gruppe und H eine Permutationsgruppe auf der Menge der Symbole $\Omega = \{1, \dots, n\}$, so heißt die Menge

$$\{(h; f) | h \in H, f : \Omega \rightarrow G\}$$

zusammen mit der Verknüpfungsvorschrift

$$(h; f)(h'; f') := (hh'; ff'_h)$$

Kranzprodukt $H \wr G$ von H mit G .

Für $f : \Omega \rightarrow G$ und $h \in H$ ist die Abbildung $f_h : \Omega \rightarrow G$ definiert durch

$$f_h(i) := f(h^{-1}(i)), \forall i \in \Omega$$

und für zwei Abbildungen $f, f' : \Omega \rightarrow G$ ist deren Produkt $ff' : \Omega \rightarrow G$ definiert durch

$$ff'(i) := f(i)f'(i), \forall i \in \Omega.$$

Sei $e : \Omega \rightarrow G$ die Abbildung mit den Werten $e(i) = 1_G, \forall i \in \Omega$ und sei $f^{-1} : \Omega \rightarrow G$ definiert durch $f^{-1} := f(i)^{-1}, \forall i \in \Omega$, so erhält man für das Einselement in $H \wr G$ und für das Inverse von $(h; f)$:

$$1_{H \wr G} = (1_H; e),$$

$$(h; f)^{-1} = (h^{-1}; f_{h^{-1}}^{-1}),$$

wobei $f_{h^{-1}}^{-1} := (f_{h^{-1}})^{-1}$ ist .

Es ist leicht zu zeigen, dass $H \wr G$ eine Gruppe der Ordnung $|H \wr G| = |G|^n |H|$ ist.

NOTATION:

Für $(h; f) \in H \wr G$ kann ebenso die entsprechende Tabellenform $(h; f_1, \dots, f_n)$ verwendet werden, wobei $f_i := f(i)$ ist.

Lemma 1.2.2

Sei $G \ni g \rightarrow \binom{i}{g(i)}$ eine Permutationsdarstellung von G auf der Menge der Symbole $\Gamma = \{1, \dots, m\}$, so erhält man durch

$$(h; f)(i, j) := (h(i); f_{h(i)}(j)), \forall (i, j) \in \Omega \times \Gamma \quad (1.1)$$

eine Permutationsdarstellung von $H \wr G$ auf $\Omega \times \Gamma$.

Beweis: Es ist einfach zu überprüfen, dass

$$(h; f)((h'; f)(i; j)) = (hh'; f f'_h)(i, j) \quad \forall f, f', h, h', i, j$$

gilt und aus $(h; f)(i, j) = (h; f)(i', j')$ folgt mit Gleichung (1.1)

$$(h(i); f_{h(i)}(j)) = (h(i'); f_{h(i')}(j')).$$

Da h eine Permutation ist, folgt $i = i'$ und man erhält $f_{h(i)}(j) = f_{h(i)}(j')$, woraus wiederum, da $f_{h(i)}$ eine Permutation ist, folgt, dass $j = j'$. \square

Im Folgenden sollen Kranzprodukte der Form $S_n \wr G$ betrachtet werden, wobei G endlich sein soll.

Definition 1.2.3

Sei $(h; f) \in S_n \wr G$ und sei

$$h = \prod_{\nu=1}^{c(h)} h_{\nu} = \prod_{\nu=1}^{c(h)} (j_{\nu} h(j_{\nu}) \cdots h^{l_{\nu}-1}(j_{\nu}))$$

die Zykelnotation von h , wobei $c(h)$ die Anzahl der disjunkten zyklischen Faktoren einschließlich der 1-Zykel ist, l_{ν} deren Länge und j_{ν} das kleinste Symbol im zyklischen Faktor ν . So definiert

$$g_{\nu}(h; f) := f(j_{\nu}) f(h^{-1}(j_{\nu})) \cdots f(h^{-l_{\nu}+1}(j_{\nu})) = f f_h \cdots f_{h^{l_{\nu}-1}}(j_{\nu}) \quad (1.2)$$

das ν -te Zykelprodukt von $(h; f)$.

Definition 1.2.4

Sei die Permutation $h \in S_n$ vom Zykeltyp $Th = (a_1, \dots, a_n) = (1^{a_1}, \dots, n^{a_n})$, das heißt h besitzt a_k zyklische Faktoren der Länge k , und sei f eine Abbildung von Ω nach G , so dass $(h; f) \in S_n \wr G$. So gibt es a_k zu den a_k Zykeln der Länge k gehörige Zykelprodukte. Seien C^1, \dots, C^s die Konjugationsklassen von G und gehören a_{ik} der a_k Zykelprodukte zu C^i , so ist

$$T(h; f) := (a_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq k \leq n}}$$

der *Zykeltyp* von $(h; f)$.

Es lassen sich nun die Konjugationsklassen von $S_n \wr G$ beschreiben.

Lemma 1.2.5

Zwei Elemente $(h; f)$ und $(h'; f')$ von $S_n \wr G$ sind konjugiert genau dann, wenn $T(h; f) = T(h'; f')$ gilt.

Beweis: siehe [JK81, S.141, Thm 4.2.8]. □

Kapitel 2

Darstellungstheorie

2.1 Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Dieses Kapitel soll die für diese Arbeit relevanten Ergebnisse der Charaktertheorie endlicher Gruppe vorstellen. Hierzu werden zunächst einige grundlegende Definitionen und Resultate der Darstellungstheorie angegeben.

Definition 2.1.1

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K , $GL(V)$ die Gruppe aller Automorphismen von V und G sei endliche Gruppe, so ist eine *Darstellung von G über K* ein Paar (D, V) mit $D_V : G \rightarrow GL(V)$ Gruppenhomomorphismus. Der Grad der Darstellung ist die Vektorraumdimension n .

NOTATION:

Ist klar, welche Abbildung gemeint ist, wird V meist selbst als Darstellung (oder K -Darstellung) von G bezeichnet. Für $D(g)(v)$ schreibt man kurz $g.v$ für $g \in G, v \in V$.

BEMERKUNG:

Diese Schreibweise macht deutlich, dass man jede Darstellung von G auch als links G -Modul auffassen kann, da jede Darstellung D von G eine Operation von G auf dem K -Vektorraum V definiert.

BEMERKUNG:

Sei (D, V) Darstellung von G und H Untergruppe von G , so induziert die auf Elemente aus H eingeschränkte Darstellung (D, V) eine Darstellung $(D|_H, V)$ von H .

Beispiel 2.1.2

- a) Die triviale Darstellung bildet alle Elemente $g \in G$ auf die Identität ab.
- b) Sei m die Ordnung von G und sei V ein Vektorraum der Dimension m mit Basis $(e_t)_{t \in G}$. Für $g \in G$ sei D_g die lineare Abbildung von V nach V , welche e_t nach e_{gt} abbildet. Die Vorschrift $g \mapsto D_g$ definiert die sogenannte reguläre Darstellung.

Definition 2.1.3

Seien (D, V) und (D', V') zwei Darstellungen von G , so heißen diese *isomorph oder äquivalent*, falls ein Isomorphismus $f : V \rightarrow V'$ existiert mit

$$f(D_V(g)(v)) = D'_{V'}(g)(f(v)) \quad \forall g \in G, v \in V.$$

Definition 2.1.4

Sei G endliche Gruppe, H Normalteiler von G und $(D|_H, V)$ Darstellung von H . $\mathbb{D}(h)$ sei die zu $D|_H(h)$ korrespondierende Matrix und $g \in G$ fix, so heißt die durch

$$h \mapsto \mathbb{D}(g^{-1}hg)$$

definierte Darstellung von H , die zu $D|_H$ *konjugierte Darstellung* bezüglich G .

Definition 2.1.5

- a) Sei V Darstellung von G und $U \subseteq V$ Untervektorraum, so heißt U *Unterdarstellung* von V , falls $g.u \in U \quad \forall g \in G, u \in U$.
- b) Eine Darstellung $V \neq \{0\}$ heißt *irreduzibel*, falls $\{0\}$ und V die einzigen Unterdarstellungen sind.

Definition 2.1.6

Eine Darstellung (D, V) von G heißt *induziert* durch eine Darstellung (R, U) von H , falls $V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma U$, wobei $\sigma U := D_\sigma U \subset V$ für ein $g \in \sigma$.

Satz 2.1.7

Sei (R, U) Darstellung von H , so existiert eine Darstellung (D, V) von G , welche durch (R, U) induziert wird. Diese Darstellung ist eindeutig bis auf Isomorphismen.

Beweis: siehe [Ser77, S.29f]. □

Definition 2.1.8

Seien V, V' Darstellungen von G so ist $V \oplus V'$ mittels $g.(v, v') = (g.v, g.v')$ wieder eine Darstellung von G . $V \oplus V'$ heißt *direkte Summe von V und V'* .

Definition 2.1.9

Sei V endlich dimensionale Darstellung von G über dem Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C} . Der Charakter χ von V ist

$$\begin{aligned}\chi &= \chi_V : G \rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \text{Spur}(\mathbb{D}(g)).\end{aligned}$$

Lemma 2.1.10

Sei χ Charakter einer Darstellung vom Grad n und $1 \in G$ Einheit, so gilt:

- (i) $\chi(1) = n$,
- (ii) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)} \quad \forall g \in G$,
- (iii) $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g) \quad \forall g \in G$,
- (iv) $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$.

Beweis: (i) $\chi(1) = \text{Spur}(\text{id}_V) = \dim V = n$

(ii) Für alle $g \in G$ existiert, da G endlich ist, ein $N \geq 0$, so dass $g^N = 1$.

\Rightarrow Alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von $\mathbb{D}(g)$ haben Betrag 1 und somit

$$\overline{\chi(g)} = \overline{\text{Spur}(\mathbb{D}(g))} = \sum \overline{\lambda_i} = \sum \lambda_i^{-1} = \text{Spur}(\mathbb{D}(g)^{-1}) = \text{Spur}(\mathbb{D}(g^{-1})) = \chi(g^{-1})$$

(iii) $\chi(hgh^{-1}) = \text{Spur}(\mathbb{D}(hg)\mathbb{D}(h^{-1})) = \text{Spur}(\mathbb{D}(h^{-1})\mathbb{D}(hg)) = \chi(g)$.

$$(iv) \quad \mathbb{D}_{V \oplus W}(g) = \begin{pmatrix} \mathbb{D}_V(g) & 0 \\ 0 & \mathbb{D}_W(g) \end{pmatrix}$$

so dass gilt $\text{Spur}(\mathbb{D}_{V \oplus W}(g)) = \text{Spur}(\mathbb{D}_V(g)) + \text{Spur}(\mathbb{D}_W(g))$. □

Satz (Orthogonalitätsrelationen) 2.1.11

Seien V, W zwei irreduzible Darstellungen, χ_V, χ_W deren Charaktere und sei

$$(\chi_V, \chi_W) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \overline{\chi_W(g)} \in \mathbb{C},$$

so gilt:

- a) $(\chi_V, \chi_V) = 1$
- b) $V \not\cong W \Rightarrow (\chi_V, \chi_W) = 0$

Beweis: siehe [Ser77, S. 15, Thm 3]. □

Das folgende Theorem besagt, wie man den Charakterwert einer induzierten Darstellung berechnet. Sei dazu wie oben (D, V) durch (R, U) induziert und χ^D und χ^R seien die zugehörigen Charaktere von G bzw. H .

Theorem 2.1.12

Sei h die Ordnung von H und sei S ein Repräsentantensystem von G/H . So lässt sich der Charakterwert für $g \in G$ durch

$$\chi^D(g) = \sum_{\substack{s \in S \\ sgs^{-1} \in H}} \chi^R(sgs^{-1}) = \frac{1}{h} \sum_{\substack{g' \in G \\ g'gg'^{-1} \in H}} \chi^R(g'gg'^{-1}) \quad (2.1)$$

berechnen.

Beweis: siehe [Ser77, S.30, Thm 12]. □

Satz 2.1.13

Sei V eine endlich dimensionale Darstellung von G , W irreduzibel und $V \cong W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ mit W_i irreduzibel. Dann ist die Anzahl $m_w = \#\{i = 1, \dots, n \mid W_i \cong W\} = (\chi_V, \chi_W)$. Insbesondere ist m_w unabhängig von der Zerlegung von V .

Beweis: $\chi_V = \sum_{i=1}^n \chi_{W_i}$, $(\chi_V, \chi_W) = \sum_{i=1}^n (\chi_{W_i}, \chi_W)$ mit Satz 2.1.8 folgt nun die Aussage des Satzes, da (χ_{W_i}, χ_W) entweder 0 oder 1 ist, abhängig davon ob W_i isomorph zu W ist oder nicht. □

Lemma 2.1.14

Zwei endlich dimensionale Darstellungen sind genau dann isomorph, wenn ihre Charaktere gleich sind.

Beweis: Satz 2.1.13 zeigt, dass eine irreduzible Darstellung in jeder der beiden Darstellungen mit der selben Multiplizität vorkommt, falls die Charaktere übereinstimmen. Daher sind in diesem Fall die beiden Darstellungen isomorph. Ebenso gilt, dass zwei isomorphe Darstellungen dieselbe Spur besitzen, so dass ihre Charaktere übereinstimmen. □

Definition 2.1.15

Eine Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Klassenfunktion*, falls sie konstant auf den Konjugationsklassen ist.

BEMERKUNG:

$H := \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist Klassenfunktion}\}$ ist ein endlich dimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum.

Satz 2.1.16

Seien W_1, \dots, W_n irreduzible Darstellungen von G und χ_1, \dots, χ_n ihre Charaktere, dann ist χ_1, \dots, χ_n eine Orthonormalbasis von H .

Beweis: siehe [Ser77, S.19, Thm 6]. □

Lemma 2.1.17

Die Anzahl der irreduziblen Darstellungen von G (bis auf Isomorphie) ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen.

Beweis: Seien C_1, \dots, C_k die Konjugationsklassen von G , so ist eine Klassenfunktion f durch die Werte λ_i auf den Klassen C_i eindeutig bestimmt. Also ist die Dimension von H gleich k und nach Satz 2.1.16 ist die Dimension gerade die Anzahl der irreduziblen Darstellungen von G (bis auf Isomorphie). Mit Lemma 2.1.14 folgt dann die Aussage des Lemmas. \square

Lemma 2.1.18

Sei G eine endliche Gruppe und seien C_1, C_2 zwei Konjugationsklassen von G mit Repräsentanten g_i . So ist die Anzahl der Lösungen der Gleichung $g_1 g_2 = z$ gleich

$$\frac{|C_1||C_2|}{|G|} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \frac{\chi(g_1)\chi(g_2)\chi(z^{-1})}{\chi(1)}, \quad (2.2)$$

wobei $\text{Irr}(G)$ die Menge aller irreduziblen Darstellungen von G ist.

Beweis: siehe [CR90, S.216, Prop. 9.33]. \square

2.2 Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe

Diese Theorie wurde größtenteils durch die Entdeckung der Young Tableaus durch Alfred Young in dessen Arbeiten über die Invariantentheorie [You52] vorangetrieben, da diese Tableaus die irreduziblen Darstellungen von S_n beschreiben.

Dieses Kapitel beinhaltet wiederum nur die für diese Arbeit relevanten Bereiche der Charaktertheorie der symmetrischen Gruppe. Ausführlichere Beschreibungen findet man in [Rob61] und [JK81].

BEMERKUNG:

Die Konjugationsklassen der symmetrischen Gruppe S_n sind definiert durch eine Partition $(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$, wobei $\lambda_1 + \dots + \lambda_h = n$. Die Norm $\|\lambda\|$ von λ ist das Größte j , so dass $\lambda_j \neq 0$.

Definition 2.2.1

- a) Eine Partition (λ) kann durch ein korrespondierendes *Young Diagramm* $[\lambda]$, welches aus n Punkten besteht, dargestellt werden. Die i -te Zeile von $[\lambda]$ besteht dabei aus λ_i Punkten und jede Zeile beginnt in der selben Spalte:

$$[\lambda] : \begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet & (\lambda_1 \text{ Punkte}) \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & & (\lambda_2 \text{ Punkte}) \\ \vdots & & & & & \\ \bullet & \cdots & \bullet & & & (\lambda_h \text{ Punkte}) \end{array}$$

$[\lambda] \geq [\mu]$, falls $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_r = \mu_r, \lambda_{r+1} \geq \mu_{r+1}$.

- b) Seien $[\lambda]$ und $[\mu]$ zwei Young Diagramme und sei $[\mu]$ vollständig in $[\lambda]$ enthalten, so heißt das Residuum $[\lambda] - [\mu]$ *Skew Diagramm*.
- c) Das zu $[\lambda]$ *konjugierte* Diagramm $[\lambda']$ erhält man durch Vertauschung der Zeilen und Spalten.
- d) Ersetzt man im Young Diagramm die Punkte durch die Symbole $1, 2, \dots, n$, so gibt es $n!$ Möglichkeiten, diese Symbole anzuordnen. Diese Diagramme heißen dann *Young Tableaus* und werden mit $t_1^\lambda, t_2^\lambda, \dots, t_{n!}^\lambda$ bezeichnet.
- e) Wählt man aus diesen $n!$ Young-Tableaus diejenigen aus, deren Einträge aufsteigend in Zeile und Spalte sind, so nennt man diese *Standard Tableaus*. Deren Anzahl wird mit f^λ bezeichnet.

Auf diesen Standard Tableaus lässt sich eine *lexikographische Ordnung* definieren:

$t_i^\lambda \geq t_j^\lambda$, falls die Symbole der ersten r Zeilen und die ersten s Symbole der $(r+1)$ -ten Zeile beider Tableaus übereinstimmen, aber das $(s+1)$ -te Symbol von t_i^λ größer ist als das $(s+1)$ -te Symbol von t_j^λ .

Nach Lemma 2.1.17 werden die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_n nun mit den korrespondierenden Young Tableaus $[\lambda]$ und die dazugehörigen Charaktere mit χ^λ bezeichnet.

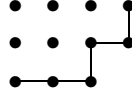
Definition 2.2.2

- a) Der *Haken* (i, j) von $[\lambda]$ besteht aus dem Punkt (i, j) zusammen mit den $(\lambda_i - i)$ Punkten rechts davon, dem *Arm*, und den $(\lambda'_j - j)$ Punkten darunter, dem *Bein*.
- b) Die *Länge* des Hakens (i, j) ist $h_{ij} = (\lambda_i - i) + (\lambda'_j - j) + 1$.
- c) Ersetzt man das Symbol an der Stelle (i, j) durch h_{ij} , so erhält man das *Haken Tableau* $H[\lambda] = (h_{ij})$. Mit H^λ bezeichnet man das Produkt aller h_{ij} .
- d) Ein *Skew-Haken* ist ein zusammenhängender Teil des Randes eines Young Diagramms, so dass bei dessen Entfernung wieder ein Young Diagramm entsteht. Die Länge eines Skew-Hakens entspricht der Anzahl der enthaltenen Punkte.

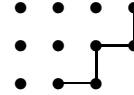
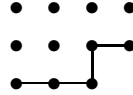
Beispiel 2.2.3

Das zur Partition $\lambda = [4^2, 3]$ gehörende Young-Diagramm besitzt

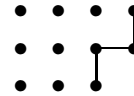
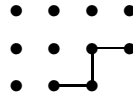
- ein Skew-Haken der Länge 6:



- zwei Skew-Haken der Länge 5:



- zwei Skew-Haken der Länge 4:

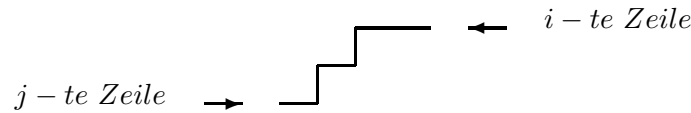


- zwei Haken der Länge 3
- zwei Skew-Haken der Länge 2
- und zwei Skew-Haken der Länge 1.

Lemma 2.2.4

Zwischen den Haken und den Skew-Haken von $[\lambda]$ gibt es eine natürliche 1-1 Korrespondenz.

Beweis:



Dieser Skew-Haken korrespondiert zu dem Haken (i, j) . □

Korollar 2.2.5

Für die Anzahl f^λ der Standard Tableaus gilt:

$$f^\lambda = n! \frac{\prod_{i < k} (h_{i1} - h_{k1})}{\prod_i h_{i1}!}. \quad (2.3)$$

Beweis: siehe [Rob61, S.44 2.36]. □

Das folgende Theorem gibt an, wie die zu einer Transposition korrespondierende Matrix explizit konstruiert werden kann. Im Gegensatz dazu folgt im Anschluss eine wesentlich

einfachere Rekursionsformel für die Berechnung der Charakterwerte beliebiger Elemente $\pi \in S_n$.

Youngs Fundamental Theorem 2.2.6

Die Konstruktion der Matrix $\mathbb{D} = (d_{ij})$, welche zur Transposition $(r, r+1)$ der irreduziblen Darstellung $[\lambda]$ korrespondiert, erfordert zunächst eine lexikographische Anordnung der f^λ Standard Tableaus $\dots t_i^\lambda, \dots, t_j^\lambda, \dots$. Setze dann

- (i) 1 an die Stelle d_{ii} , falls r und $r+1$ in der selben Zeile von t_i^λ vorkommen,
- (ii) -1 an die Stelle d_{ii} , falls r und $r+1$ in der selben Spalte von t_i^λ vorkommen oder
- (iii) eine quadratische Matrix

$$(a) \begin{matrix} & t_i^\lambda & t_j^\lambda \\ t_i^\lambda & \begin{pmatrix} -p & 1-p^2 \\ 1 & p \end{pmatrix} \\ t_j^\lambda & \end{matrix} \text{ oder } (b) \begin{matrix} & t_i^\lambda & t_j^\lambda \\ t_i^\lambda & \begin{pmatrix} -p & \sqrt{1-p^2} \\ \sqrt{1-p^2} & p \end{pmatrix} \\ t_j^\lambda & \end{matrix}$$

an die Schnittstelle der zu t_i^λ und t_j^λ korrespondierenden Zeilen und Spalten, falls $i < j$ und t_j^λ durch t_i^λ entsteht, indem man r und $r+1$ vertauscht.

Tritt r an der Stelle (k, l) und $r+1$ an der Stelle (m, n) von t_i^λ auf, wobei $k < m$, $l > n$, so ist

$$\frac{1}{p} = (l-k)(n-m).$$

- (iv) 0, sonst.

Beweis: siehe [You52, (VI) 34:196-230 (1932)]. □

Beispiel 2.2.7

Sei $[\lambda] = [2, 2]$ Darstellung von S_4 , so lassen sich die zu den Permutationen (12) und (12)(34) korrespondierenden Matrizen nach Theorem 2.2.6 folgendermaßen berechnen:

1) $f^\lambda = 4! \frac{1!}{3!2!} = 2$ nach Gleichung (2.3)

2) $t_1^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, t_2^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

3) Man erhält $[2, 2]((12)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $[2, 2]((12)(34)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Murnaghan-Nakayama Formel 2.2.8

Sei $\pi = \sigma\gamma$ disjunktes Produkt von $\sigma \in S_{n-k}$ und einem k -Zykel γ . So gilt:

$$\chi^\lambda(\pi) = \sum_{\mu} \chi^{\lambda-\mu}(\gamma) \cdot \chi^\mu(\sigma), \quad (2.4)$$

wobei die Summe über alle Diagramme $[\mu]$ bestehend aus $n - k$ Punkten läuft.

Beweis: siehe [Jam78, S.79]. □

Die rekursive Berechnung der einzelnen Charakterwerte von S_n mit Hilfe obiger Formel, die erstmals von Murnaghan [Mur37] bewiesen wurde, lässt sich noch durch das folgende Lemma vereinfachen.

Lemma 2.2.9

Sei $[\lambda] - [\mu]$ Darstellung von S_n und π Zykel der Länge n , so lässt sich der Charakter von π in der Darstellung $[\lambda] - [\mu]$ wie folgt berechnen:

$$\chi^{\lambda-\mu}(\pi) = \begin{cases} (-1)^l, & \text{falls } [\lambda] - [\mu] \text{ ein Skew-Haken mit Beinlänge } l \text{ ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.5)$$

wobei die Beinlänge des zum Skew-Haken korrespondierenden Hakens gemeint ist.

Beweis: siehe [Rob61, S.77 4.15]. □

Die Vereinfachung der Formel (2.4) entsteht also dadurch, dass nicht mehr alle Diagramme $[\mu]$ auf den $n - k$ Punkten betrachtet werden müssen, sondern nur noch diejenigen, deren Residuum $[\lambda] - [\mu]$ ein Skew Haken ist.

Beispiel 2.2.10

a) Im Fall von S_2 gibt es nur zwei irreduzible Charaktere $[2]$ und $[1^2]$. Für diese gilt nach Satz 2.1.10 (i) und 2.1.11, dass $\chi^2(1^2) = \chi^{1^2}(1^2) = 1$ und $\chi^2(2) = 1$, $\chi^{1^2}(2) = -1$ ist.

b) Für die Berechnung von $\chi^{2,1}(2)(1)$ gilt nach Gleichung (2.4)

$$\chi^{2,1}(2)(1) = 1 \cdot \chi^2(2) + 1 \cdot \chi^{1^2}(2) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0.$$

c) $\chi^{3,1}(2)(2)$ lässt sich mit Formel (2.4) und (2.5) folgendermaßen rekursiv berechnen

$$\chi^{3,1}(2)(2) = 1 \cdot \chi^{3,1-2}(2) + (-1) \cdot \chi^{3,1-1^2}(2) = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1$$

Das folgende asymptotische Resultat der Charaktertheorie in Satz 2.2.11 und das anschließende Theorem über die asymptotische Verteilung der Zykellanzahl einer Permutation von n Elementen sind wichtige Hilfsmittel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt zweier beliebiger Elemente $\sigma, \tau \in S_n$ genau s Zyklen besitzt.

Satz 2.2.11

Es gilt:

$$\sum_{\lambda} \chi^{\lambda}(1)^{-c} = 2 \sum_{\lambda: \lambda_1 > n-A} \chi^{\lambda}(1)^{-c} + \mathcal{O}(n^{-Ac}). \quad (2.6)$$

Beweis: siehe [Lul96]. □

Theorem 2.2.12

Sei $M_{(n)}$ die Anzahl der Zyklen einer Permutation von n Elementen, E_n der Erwartungswert und σ_n die Standardabweichung der Zufallsvariablen $M_{(n)}$, so erhält man:

(i) für σ_n und E_n die folgenden Werte

$$E_n = \log n + \gamma + o(1)$$

$$\sigma_n = \sqrt{\log n} - \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\log n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right),$$

wobei γ die Eulerkonstante ist

(ii) für die charakteristische Funktion $\Phi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x)$, wobei $F_n(x)$ Verteilungsfunktion der standardisierten Zufallsvariable $\frac{M_{(n)} - E_n}{\sigma_n \sqrt{2}}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Also ist die standardisierte Zufallsvariable standardnormalverteilt.

Beweis: siehe [Gon44, S.35 ff.]. □

2.3 Darstellungstheorie des Kranzproduktes $H \wr G$

Dieses Kapitel beschreibt in Anlehnung an [JK81, Kapitel 4] und [Ker75, Kapitel 1] die Konstruktion irreduzibler Darstellungen von $H \wr G$ nach der Darstellungstheorie von A.H.

Clifford in [Cli37]. Dabei sei G eine endliche Gruppe und H eine Permutationsgruppe auf der Menge der Symbole $\Omega = \{1, \dots, n\}$ und K im Folgenden stets ein algebraisch abgeschlossener Körper. Für $K = \mathbb{C}$ hat W. Specht in [Spe33] erstmals die irreduziblen Darstellungen von $H \wr G$ konstruiert, ebenso wurde der Spezialfall $S_n \wr G$ von W. Specht in [Spe32] behandelt.

Definition 2.3.1

Die normale Untergruppe

$$G^* := \{(1_H; f) | f \in G^n\}$$

heißt *Basisgruppe* von $H \wr G$. Sie ist das direkte Produkt von n Kopien von G , wobei

$$G_i := \{(1_H; f) | f_j = 1_G \ \forall j \neq i\} \cong G.$$

Die Untergruppe $H' := \{(h, e) | h \in H\}$, welche isomorph zu H selbst ist, ist das *Komplement der Basisgruppe* G^* .

Sei D eine irreduzible Darstellung von G mit zugehörigem Vektorraum V , so ist es Ziel dieses Kapitels zu zeigen, dass diese Darstellung zu einer Darstellung von $H \wr G$ erweitert werden kann. Sei dazu $\{b_1, \dots, b_m\}$ K -Basis von V , das heißt $V = \langle b_1, \dots, b_m \rangle_K$ und sei $\bigotimes^n V := V \otimes_K \dots \otimes_K V$ (n Faktoren), so erhält man eine Basis von $\bigotimes^n V$ durch:

$$\bigotimes^n V = \left\langle \left\langle b_\varphi | \varphi \in [m]^{[n]} \right\rangle \right\rangle_K, \quad (2.7)$$

wobei $[m] = \{1, \dots, m\}$ bzw. $[n] = \{1, \dots, n\}$.

Fasst man D nun als links G -Modul auf, so wird $\bigotimes^n V$ ein links $H \wr G$ -Modul mittels der folgenden Operation von $(h; f) \in H \wr G$ auf den Basiselementen b_φ

$$(h; f).b_\varphi := f(1).b_{\varphi(h^{-1}(1))} \otimes \dots \otimes f(n).b_{\varphi(h^{-1}(n))}. \quad (2.8)$$

Die dadurch beschriebene Darstellung von $H \wr G$ wird mit

$$\left(\begin{smallmatrix} n \\ \# \end{smallmatrix} D \right)^\sim$$

bezeichnet, denn die Einschränkung der durch (2.8) beschriebenen Darstellung auf G^* ist gerade das n -fache äußere Tensorprodukt $\#^n D$ von D .

Beispiel 2.3.2

Sei $[\lambda] = [2, 2]$ Darstellung von S_4 und $((132); (12), id, (12)(34)) \in S_3 \wr S_4$. Weiter sei $\{b_1, b_2\}$ die K -Basis von V , so operiert $((132); e)$ wie folgt auf den 8 Basiselementen $\{b_{\varphi_1}, \dots, b_{\varphi_8}\}$

von $\otimes^3 V$:

$$\begin{aligned}
b_{\varphi_1} &:= b_1 \otimes b_1 \otimes b_1 &\mapsto b_1 \otimes b_1 \otimes b_1 = b_{\varphi_1} \\
b_{\varphi_2} &:= b_1 \otimes b_1 \otimes b_2 &\mapsto b_1 \otimes b_2 \otimes b_1 = b_{\varphi_3} \\
b_{\varphi_3} &:= b_1 \otimes b_2 \otimes b_1 &\mapsto b_2 \otimes b_1 \otimes b_1 = b_{\varphi_5} \\
b_{\varphi_4} &:= b_1 \otimes b_2 \otimes b_2 &\mapsto b_2 \otimes b_2 \otimes b_1 = b_{\varphi_7} \\
b_{\varphi_5} &:= b_2 \otimes b_1 \otimes b_1 &\mapsto b_1 \otimes b_1 \otimes b_2 = b_{\varphi_2} \\
b_{\varphi_6} &:= b_2 \otimes b_1 \otimes b_2 &\mapsto b_1 \otimes b_2 \otimes b_2 = b_{\varphi_4} \\
b_{\varphi_7} &:= b_2 \otimes b_2 \otimes b_1 &\mapsto b_2 \otimes b_1 \otimes b_2 = b_{\varphi_6} \\
b_{\varphi_8} &:= b_2 \otimes b_2 \otimes b_2 &\mapsto b_2 \otimes b_2 \otimes b_2 = b_{\varphi_8}
\end{aligned}$$

Die zu dem Element $((132); (12), id, (12)(34))$ unter der Darstellung $(\#^3[2, 2])^\sim$ korrespondierende Matrix lässt sich nun folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned}
&\left(\#^3[2, 2]\right)^\sim ((132); (12), id, (12)(34)) \\
&= \left(\#^3[2, 2]\right)^\sim (1_{S_3}; (12), id, (12)(34)) \left(\#^3[2, 2]\right)^\sim ((132); e).
\end{aligned}$$

Mit der angegebenen Operation von $((132); e)$ auf den Basiselementen $\{b_{\varphi_1}, \dots, b_{\varphi_8}\}$ erhält man

$$\left(\#^3[2, 2]\right)^\sim ((132); e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Und nach Beispiel 2.2.7 gilt

$$\begin{aligned}
\left(\#^3[2, 2]\right)^\sim (1_{S_3}; (12), id, (12)(34)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \# \end{smallmatrix} [2, 2] \right)^\sim ((132); (12), id, (12)(34)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Das untenstehende Lemma 2.3.3 aus [JK81, S.149] gibt an, wie man die zur Darstellung $(\#^n D)^\sim$ gehörigen Charaktere berechnet. Dabei sei $g_\nu(h; f)$ die durch Gleichung (1.2) definierte Zykelarstellung von $(h; f)$. Der Beweis dieses Lemmas wird hier angegeben, da sich die Notation von der in [JK81] in einigen Punkten unterscheidet.

Lemma 2.3.3 *Es gilt:*

$$\chi^{(\#^n D)^\sim}(h; f) = \prod_{\nu=1}^{c(h)} \chi^D(g_\nu(h; f)) \quad \forall (h; f) \in H \wr G. \quad (2.9)$$

Beweis: Nach (2.7) kann die Spur von $(h; f)$ durch

$$\chi^{(\#^n D)^\sim}(h; f) = \sum_{\varphi} [\text{Koeffizient von } b_{\varphi} \text{ in } (h; f).b_{\varphi}]$$

berechnet werden. Sei \mathbb{D} die zur Darstellung D korrespondierende Matrix mit $\mathbb{D}(g) =: (d_{ik}(g))$, so lässt sich der Koeffizient mit Gleichung (2.8) wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} (h; f).b_{\varphi} &= \left(\sum_{i_1=1}^m d_{i_1 \varphi(h^{-1}(1))}(f(1))b_{i_1} \right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{i_n=1}^m d_{i_n \varphi(h^{-1}(n))}(f(n))b_{i_n} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq m} d_{i_1 \varphi(h^{-1}(1))}(f(1)) \cdots d_{i_n \varphi(h^{-1}(n))}(f(n))b_{i_1} \otimes \cdots \otimes b_{i_n} \\ &= \sum_{\psi} \left(\prod_j d_{\psi(j) \varphi(h^{-1}(j))}(f(j)) \right) b_{\psi}. \end{aligned}$$

Der Koeffizient von b_{φ} ist also $\prod_{j=1}^n d_{\varphi(j) \varphi(h^{-1}(j))}(f(j))$. Sortiert man nun die Faktoren in geeigneter Weise um, so erhält man das Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{c(h)} d_{\varphi(j_{\nu}) \varphi(h^{-1}(j_{\nu}))}(f(j_{\nu})) d_{\varphi(h^{-1}(j_{\nu})) \varphi(h^{-2}(j_{\nu}))}(f(h^{-1}(j_{\nu}))) \cdots d_{\varphi(h^{\nu-1}(j_{\nu})) \varphi(j_{\nu})}(f(h^{\nu-1}(j_{\nu}))).$$

Summiert man diesen Ausdruck noch über alle Abbildungen $\varphi \in [m]^{[n]}$, so führt dies zur gewünschten Charaktergleichung. \square

Im Weiteren soll nun erläutert werden, wie man ein vollständiges System paarweiser nicht äquivalenter irreduzibler Darstellungen von $H \wr G$ erhält. Dazu betrachte man ein vollständiges System D^1, \dots, D^r paarweiser nicht äquivalenter irreduzibler Darstellungen von G über K mit zugehörigen Vektorräumen V^j . Die irreduziblen Darstellungen von G^* sind dann von der Form $D^* := D_1 \# \dots \# D_n$, wobei $D_i \in \{D^1, \dots, D^r\}$. Der zugrundeliegende Vektorraum ist $\bigotimes_i V := V_1 \otimes_K \dots \otimes_K V_n$, wobei $V_i := V^j$, falls $D_i = D^j$.

Definition 2.3.4

- a) Sei n_j die Anzahl der Faktoren D_i von D^* , welche mit D^j übereinstimmen, $1 \leq j \leq r$, so heißt $(n) := (n_1, \dots, n_r)$ *Typ von D^** .
- b) Die *Trägheitsgruppe von D^** ist definiert als

$$H_{D^*} \wr G := \left\{ (h; f) \mid D^{*(h;f)} \sim D^* \right\},$$

wobei \sim die Äquivalenz der Darstellungen bedeutet und $D^{*(h;f)}$ die zu D^* konjugierte Darstellung ist, das heißt

$$D^{*(h;f)}(1_H; f') = D^*(h; f)^{-1}(1_H; f')(h; f).$$

Lemma 2.3.5

Sei (n) der Typ von D^* und sei $S_{(n)} := S_{n_1} \times \dots \times S_{n_r}$, so gilt für die Trägheitsgruppe

$$H_{D^*} \wr G = H \cap S_{(n)} \wr G.$$

Beweis: siehe [JK81, S.152, Lemma 4.3.27]. □

Nach Cliffords Theorie lassen sich die irreduziblen Darstellungen D^* zu Darstellungen von $H_{D^*} \wr G$ fortsetzen. Diese fortgesetzten Darstellungen werden mit \widetilde{D}^* bezeichnet.

Sei D'' eine irreduzible Darstellung von H_{D^*} , so erhält man eine zweite irreduzible Darstellung D' von $H_{D^*} \wr G$ durch

$$D'(h; f) := D''(h).$$

Die Multiplikation dieser beiden Darstellungen ergibt eine dritte irreduzible Darstellung von $H_{D^*} \wr G$: Das innere Tensorprodukt

$$D' \otimes \widetilde{D}^*.$$

Cliffords Theorie über die Darstellungen von Gruppen mit normalen Untergruppen liefert das Resultat, dass jede irreduzible Darstellung von $H \wr G$ von der Form

$$D := (D' \otimes \widetilde{D}^*) \uparrow H \wr G$$

ist und besagt im folgenden Theorem zudem, wie man ein vollständiges System irreduzibler Darstellungen von $H \wr G$ erhält.

Theorem 2.3.6

Die irreduzible K -Darstellung $D := (D' \otimes \widetilde{D}^*) \uparrow H \wr G$ durchläuft ein vollständiges System paarweise nicht äquivalenter irreduzibler Darstellungen von $H \wr G$, falls D^* ein vollständiges System paarweise nicht konjugierter (bezüglich H') aber irreduzibler K -Darstellungen von G^* und D'' bei festem D^* ein vollständiges System paarweise nicht äquivalenter und irreduzibler K -Darstellungen von $H \cap S_{(n)}$ durchläuft.

Beispiel 2.3.7

Die irreduziblen Darstellungen von S_3 sind $[3], [2, 1]$ und $[1^3]$, die von S_2 sind $[2]$ und $[1^2]$ und die von S_1 ist $[1]$. Ein vollständiges System irreduzibler Darstellungen von $S_3 \wr S_3$ ist dann nach Theorem 2.3.6

$$\begin{array}{lll} ([3]; [3]) & ([2, 1]; [3]) & ([1^3]; [3]) \\ ([3]; [2, 1]) & ([2, 1]; [2, 1]) & ([1^3]; [2, 1]) \\ ([3]; [1^3]) & ([2, 1]; [1^3]) & ([1^3]; [1^3]) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} ([2] \otimes ([3] \# [3] \# [2, 1])) \uparrow S_3 \wr S_3 & ([1^2] \otimes ([3] \# [3] \# [2, 1])) \uparrow S_3 \wr S_3 \\ ([2]' \otimes ([3] \# [2, 1] \# [2, 1])) \uparrow S_3 \wr S_3 & ([1^2]' \otimes ([3] \# [2, 1] \# [2, 1])) \uparrow S_3 \wr S_3 \\ ([2]' \otimes ([3] \# [3] \# [1^3])) \uparrow S_3 \wr S_3 & ([1^2]' \otimes ([3] \# [3] \# [1^3])) \uparrow S_3 \wr S_3 \\ ([2]' \otimes ([3] \# [1^3] \# [1^3])) \uparrow S_3 \wr S_3 & ([1^2]' \otimes ([3] \# [1^3] \# [1^3])) \uparrow S_3 \wr S_3 \\ ([2]' \otimes ([1^3] \# [2, 1] \# [2, 1])) \uparrow S_3 \wr S_3 & ([1^2]' \otimes ([1^3] \# [2, 1] \# [2, 1])) \uparrow S_3 \wr S_3 \\ ([2]' \otimes ([2, 1] \# [1^3] \# [1^3])) \uparrow S_3 \wr S_3 & ([1^2]' \otimes ([2, 1] \# [1^3] \# [1^3])) \uparrow S_3 \wr S_3 \end{array}$$

$$([1]' \otimes ([3] \# [2, 1] \# [1^3])) \uparrow S_3 \wr S_3$$

wobei $([\lambda]; [\mu]) := ([\lambda] \otimes (\#^3 [\mu])^\sim)$.

Lemma 2.3.8 *Es gilt:*

$$\chi^{\widetilde{D}^*}(h; f) = \prod_{\nu=1}^{c(h)} \chi^{D_{j\nu}}(g_\nu(h; f)) \quad \forall (h; f) \in H_{D^*} \wr G. \quad (2.10)$$

Beweis: Analog zum Beweis von Lemma 2.3.3 erhält man anstelle der letzten Gleichung im Beweis jetzt die Gleichung

$$\prod_{\nu=1}^{c(h)} d_{\varphi(j_\nu)\varphi(h^{-1}(j_\nu))}^{j_\nu} (f(j_\nu)) d_{\varphi(h^{-1}(j_\nu))\varphi(h^{-2}(j_\nu))}^{h^{-1}(j_\nu)} (f(h^{-1}(j_\nu))) \cdots d_{\varphi(h^{l_\nu-1}(j_\nu))\varphi(j_\nu)}^{h^{l_\nu-1}(j_\nu)} (f(h^{l_\nu-1}(j_\nu))).$$

Da $h \in H_{D^*}$ gilt $d^{j_\nu} = d^{h^{-1}(j_\nu)} = \cdots = d^{h^{l_\nu-1}(j_\nu)}$ und man erhält wieder durch Summation über die Abbildungen φ die gewünschte Charaktergleichung. \square

BEMERKUNG:

Die Abbildungen φ in Lemma 2.3.8 stimmen nicht mit denen in Lemma 2.3.3 überein. Da die zugrundeliegenden Vektorräume der Darstellungen D_i nicht identisch sein müssen.

Beispiel 2.3.9

Betrachte die Darstellung $\widetilde{D}^* = ([2, 1] \# [2, 1] \# [1^3])$ und das Element $((12); (12), id, (123)) \in S_{3_{D^*}} \wr S_3$, so gilt:

$$\begin{aligned} [2, 1] \# [2, 1] \# [1^3](1; (12), id, (123)) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes (-1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sei $\{b_1, b_2\}$ Basis von $V_1 = V_2$ und $\{c_1\}$ Basis von V_3 , so operiert $((12), e)$ wie folgt auf den 4 Basiselementen $\{b_{\varphi_1}, \dots, b_{\varphi_4}\}$

$$\begin{aligned} b_{\varphi_1} &:= b_1 \otimes b_1 \otimes c_1 \mapsto b_1 \otimes b_1 \otimes c_1 = b_{\varphi_1} \\ b_{\varphi_2} &:= b_1 \otimes b_2 \otimes c_1 \mapsto b_2 \otimes b_1 \otimes c_1 = b_{\varphi_3} \\ b_{\varphi_3} &:= b_2 \otimes b_1 \otimes c_1 \mapsto b_1 \otimes b_2 \otimes c_1 = b_{\varphi_2} \\ b_{\varphi_4} &:= b_2 \otimes b_2 \otimes c_1 \mapsto b_2 \otimes b_2 \otimes c_1 = b_{\varphi_4} \end{aligned}$$

Somit folgt

$$[2, 1] \# [2, 1] \# [1^3]((12); (12), id, (123)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und $\chi^{\widetilde{D}^*}((12); (12), id, (123)) = 0$.

CHARAKTERBERECHNUNG FÜR INDUZIerte CHARAKTERE:

Die Formel für die Berechnung der induzierten Charakterwerte (vgl. Formel (2.1)) ist gegeben durch

$$\chi^D(h; f) = \begin{cases} \frac{1}{|H_{D^*} \wr G|} \sum_{x \in H \wr G} \dot{\chi}^{D' \otimes \widetilde{D}^*}(x(h; f)x^{-1}), & \text{falls } H_{D^*} \neq H \\ \chi^{D' \otimes \widetilde{D}^*}(h; f), & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\text{wobei } \dot{\chi}^{D' \otimes \widetilde{D}^*}(h'; f') = \begin{cases} \chi^{D' \otimes \widetilde{D}^*}(h'; f'), & \text{falls } (h'; f') \in H_{D^*} \wr G \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
\text{und } \chi^{D' \otimes \widetilde{D}^*}(h; f) &= \chi^{D'}(h; f) \chi^{\widetilde{D}^*}(h; f) \\
&= \chi^{D''}(h) \chi^{\widetilde{D}^*}(h; f) \\
&= \chi^{D''}(h) \prod_{\nu=1}^{c(h)} \chi^{D_{j_\nu}}(g_\nu(h; f))
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Dabei ist $D_{j_\nu} = D$ für den Fall, dass $D^* = \#^n D$ ist.

Kapitel 3

$$C_4 \wr S_n$$

Dieses Kapitel soll zum einen die Betrachtung des Kranzproduktes $C_4 \wr S_n$ für die Berechnung des Geschlechts eines Origamis O motivieren. Zum anderen werden die Resultate der Charaktertheorie aus Kapitel 2 verwendet, um die Verteilung des Geschlechts eines zufällig gewählten Origami, das heißt eines Origami mit zufälligen Verklebungen, zu berechnen.

3.1 Motivation

Die Berechnung des Geschlechts g eines zufällig gewählten Origami, bestehend aus n -Kopien des euklidischen Einheitsquadrates, geht nach der Euler-Charakteristik $\chi = E - K + F$ und der Beziehung $\chi = 2 - 2g$ zurück auf die Berechnung der Eckenanzahl nach Verklebung. Die Anzahl der Flächen ist n und die Anzahl der Kanten ist $2n$.

Betrachtet man die zwei Elemente

$$\sigma := ((13)(24); \sigma_a, \sigma_b, \sigma_a^{-1}, \sigma_b^{-1}) \text{ und } \tau := ((1234); id, id, id, id) \in C_4 \wr S_n,$$

so stimmt die Anzahl der Identifikationsklassen der Ecken nach der Verklebung mit der Anzahl der Bahnen von folgender Operation überein:

$$\begin{aligned} \phi : \langle \sigma\tau \rangle \times ([4] \times [n]) &\rightarrow ([4] \times [n]) \\ \phi((\sigma\tau)^k, (i, j)) &= (\tilde{\pi}^k(i), (f_k)_{\tilde{\pi}^k(i)}(j)) \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei $\langle \sigma\tau \rangle \ni (\sigma\tau)^k = (\tilde{\pi}^k; (f_k)_1, (f_k)_2, (f_k)_3, (f_k)_4)$, $\tilde{\pi} = (1432)$, $(f_k)_i \in S_n$ und $[n] := \{1, \dots, n\}$ ist.

Hierbei entspricht $(i, j) \in [4] \times [n]$ der i -ten Kante im j -ten euklidischen Einheitsquadrat, so dass die zu verklebenden Einheitsquadrate zukünftig immer die untenstehende Kantenbeschriftung haben, auch wenn diese nicht explizit angegeben ist. Ebenso wird ab jetzt anstelle von $\phi((\sigma\tau)^k, (i, j))$ die Notation $(\sigma\tau)^k \cdot (i, j)$ verwendet.

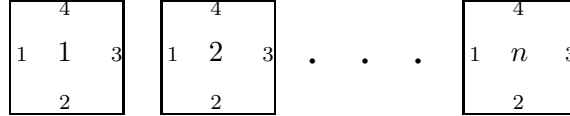


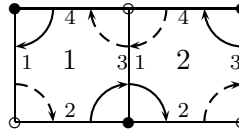
Abb.4: n Euklidische Einheitsquadrate mit Kantenbeschriftung.

Die Beispiele 3.1.1 a) und b) werden zeigen, dass die Betrachtung des Kranzproduktes im Falle von Origamis, die durch Verklebungsvorschriften definiert werden, sehr anschaulich ist, denn bildlich bedeutet τ eine Vierteldrehung nach rechts und σ ein Wechsel zur verklebten Kante. Zeichnet man nun alle Drehungen ein, so umrundet man alle Ecken der selben Markierung, indem man alle Kanten einer Bahn durchläuft.

Beispiel 3.1.1

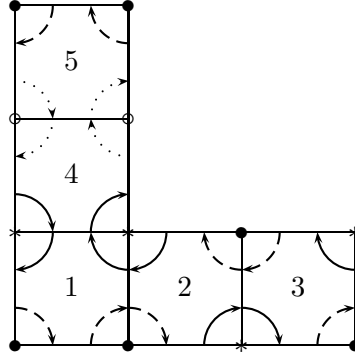
- a) Bei dem Origami O_1 aus Beispiel 1.1.2 b) ist $\sigma = ((13)(24); (12), (12), (12), (12))$ und $\tau = ((1234); id, id, id, id)$, so dass $\sigma\tau = ((1432); (12), (12), (12), (12))$. Man erhält unter obiger Operation zwei Bahnen

$$\begin{aligned} \sigma\tau \cdot (1, 1) &= (4, 2), \quad \sigma\tau \cdot (4, 2) = (3, 1), \quad \sigma\tau \cdot (3, 1) = (2, 2), \quad \sigma\tau \cdot (2, 2) = (1, 1) \\ \sigma\tau \cdot (1, 2) &= (4, 1), \quad \sigma\tau \cdot (4, 1) = (3, 2), \quad \sigma\tau \cdot (3, 2) = (2, 1), \quad \sigma\tau \cdot (2, 1) = (1, 2). \end{aligned}$$



- b) Für das Origami D erhält man mit $\sigma_a = (123)$ und $\sigma_b = (145)(23)$ die folgenden drei Bahnen

$$\begin{aligned} \langle \sigma\tau \rangle \cdot (1, 1) &= \{(4, 5), (3, 5), (2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 2), (2, 3), (1, 1)\} \\ \langle \sigma\tau \rangle \cdot (1, 3) &= \{(4, 2), (3, 1), (2, 4), (1, 4), (4, 1), (3, 3), (2, 2), (1, 3)\} \\ \langle \sigma\tau \rangle \cdot (1, 5) &= \{(4, 4), (3, 4), (2, 5), (1, 5)\}. \end{aligned}$$



Eine weitere Möglichkeit, die Anzahl der Ecken nach Verklebung zu berechnen, ist die Betrachtung der Anzahl der Zyklen des Elements $\sigma_a \sigma_b \sigma_a^{-1} \sigma_b^{-1} \in S_n$. Dies hätte zur Folge, dass nicht Formel (2.2), sondern die Anzahl der Lösungen $N^{S_n}(z)$ der Gleichung $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = z$ betrachtet werden müsste. Diese Anzahl ist gegeben durch

$$N^{S_n}(z) = n! \sum_{\chi} \frac{\chi(z)}{\chi(1)}$$

(vgl. [MP02, S.625]). Von diesem Ansatz soll hier jedoch nicht ausgegangen werden, da es auch Ziel dieser Arbeit ist, das Kranzprodukt und dessen Darstellung genauer zu untersuchen.

3.2 Wahrscheinlichkeit der Eckenanzahl

Nach 3.1 lässt sich die Wahrscheinlichkeit der Eckenanzahl nach Identifikation über die Anzahl der Bahnen, der durch (3.1) definierten Operation, berechnen, das heißt

$$P(\# \text{Ecken nach Identifikation} = k) = P(\# \text{Bahnen} = k).$$

Behauptung 3.2.1

$$P(\# \text{Bahnen} = k) = \sum_{\pi: \pi' \text{ hat } k \text{ Zyklen}} P(\sigma\tau = \pi),$$

wobei $\pi = (\tilde{\pi}; \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \in C_u \wr S_n$ und $\pi' = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 \circ \pi_4$ ist.

Beweis: Mit $\pi = (\tilde{\pi}; \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ und $\tilde{\pi} = (1432)$ folgt für die Operation von π auf (i, j) , dass

$$\pi.(i, j) = ((1432)(i); \pi_{(1432)(i)}(j)).$$

Dies impliziert, dass die Bahnen dieser Operation immer $4 \cdot b$, $b \in \mathbb{N}$, Elemente haben, da die Ordnung von $\tilde{\pi}$ vier ist.

Betrachtet man nun \mathbb{E} das Tupel $(1, j)$, so ist $\pi^4(1, j) = (1; \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 \circ \pi_4(j))$. Liegt j nun in einem Zykel der Länge b von $\tilde{\pi}$, so hat die Bahn $4 \cdot b$ Elemente. Die Anzahl der Bahnen entspricht dann genau der Anzahl der Zykel von $\tilde{\pi}$.

(Wählt man ein anderes Tupel, so erhält man nicht $\tilde{\pi}$, sondern ein zu $\tilde{\pi}$ konjugiertes Element in S_n .) \square

Theorem 3.2.2

Sei die Anzahl m der Zykel von $\pi' \leq \sqrt[3]{n}$, so gilt

$$P(\sigma\tau = \pi) = \frac{1}{n!^4} (1 + \text{sgn}(\pi') + \mathcal{O}(n^{-\frac{2}{3}})).$$

Korollar 3.2.3

Es gilt

$$P(\sigma\tau = \pi) = \frac{1}{|C_4 \wr S_n|} \sum_D \frac{\chi^D(\sigma)\chi^D(\tau)\chi^D(\pi)}{\chi^D(1)}, \quad (3.2)$$

wobei die Summe über alle irreduziblen Darstellungen D von $C_4 \wr S_n$ läuft.

Beweis: Nach (2.2) gilt, dass die Anzahl der Lösungen der Gleichung $\sigma\tau = \pi$ gleich $\frac{|C_\sigma||C_\tau|}{|G|} \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \frac{\chi(\sigma)\chi(\tau)\chi(\pi^{-1})}{\chi(1)}$ ist, wobei C_σ bzw. C_τ die zu σ bzw. τ gehörigen Konjugationsklassen sind. Da nach Lemma 2.1.10 (iii) der Charakter eine Klassenfunktion ist, kann man anstelle von $\chi(C_\sigma)$ bzw. $\chi(C_\tau)$ auch $\chi(\sigma)$ bzw. $\chi(\tau)$ schreiben. Teilt man noch durch die Anzahl der möglichen Permutationen von $\sigma\tau$, so erhält man die Aussage aus dem Korollar. \square

Zunächst sollten also die Charaktere der Element σ und τ für den Beweis des Theorems 3.2.2 bestimmt werden. Hierfür betrachte man die Gleichungen (2.11), (2.12) und (2.13).

Aus (2.12) folgt, dass falls $\chi(\tau) \neq 0$ sein soll, so muss gelten $D^* = \lambda \# \lambda \# \lambda \# \lambda$, wobei λ eine irreduzible Darstellung von S_n ist. Es folgt also, dass $C_{4D^*} = C_4 \cap S_4 = C_4$ ist.

Die Charaktere lassen sich demnach durch Gleichung (2.13) mit dem Zykelprodukt aus Definition 1.2.4 wie folgt darstellen:

$$\chi^D(\sigma) = \chi^{D' \otimes \widetilde{D}^*}(\sigma) = \chi^{D''}((13)(24))\chi^\lambda(1)^2 \quad (3.3)$$

$$\chi^D(\tau) = \chi^{D''}((1234))\chi^\lambda(1) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
\chi^D(\pi) &= \chi^{D''}((1234))\chi^\lambda(g_\nu(\pi^{-1})) \\
&= \chi^{D''}((1234))\chi^\lambda(\pi'^{-1}) \\
&= \chi^{D''}((1234))\chi^\lambda(\pi') \quad \text{nach 2.1.10 (ii)} \\
\chi^D(1) &= \chi^{D''}(1)\chi^\lambda(1)^4
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\chi^D(1) = \chi^{D''}(1)\chi^\lambda(1)^4 \tag{3.6}$$

Die Charakterwerte der Elemente von C_4 sind durch die untenstehende Tabelle gegeben.

	id	(1234)	$(13)(24)$	(1432)
χ^1	1	1	1	1
χ^2	1	i	-1	-i
χ^3	1	-1	1	-1
χ^4	1	-i	-1	i

Korollar 3.2.4

Es gilt

$$P(\sigma\tau = \pi) = \frac{1}{n!^4} \sum_{\lambda} \frac{\chi^\lambda(\pi')}{\chi^\lambda(1)},$$

wobei die Summe über alle irreduziblen Darstellungen λ von S_n läuft.

Beweis: Nach den Gleichungen (3.4)-(3.7) lässt sich Gleichung (3.2) umschreiben zu

$$P(\sigma\tau = \pi) = \frac{1}{4n!^4} \sum_D \frac{\chi^{D''}((13)(24))\chi^\lambda(1)^2\chi^{D''}((1234))\chi^\lambda(1)\chi^{D''}((1234))\chi^\lambda(\pi')}{\chi^{D''}(1)\chi^\lambda(1)^4}$$

Nach obenstehender Charakterwerttabelle gilt jedoch

$$\frac{\chi^{D''}((13)(24))\chi^{D''}((1234))^2}{\chi^{D''}(1)} = 1 \text{ für alle Darstellungen } D'' \text{ von } C_4.$$

Kürzt man die 4 Darstellungen von C_4 , so erhält man die Aussage des Korollars. \square

Extrahiert man nun die Darstellungen $[n]$, $[1^n]$, $[n-1, 1]$ und $[2, 1^{n-2}]$ und wendet auf diese die Murnaghan-Nakayama Formel (2.4) an, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit

$$P(\sigma\tau = \pi) = \frac{1}{n!^4}((1 + \text{sgn}(\pi'))(1 + \frac{l-1}{n-1}) \sum_{\lambda} \frac{\chi^\lambda(\pi')}{\chi^\lambda(1)}, \tag{3.7}$$

wobei die Summe über alle irreduziblen Darstellungen λ mit $\lambda \neq [n], [1^n], [n-1, 1], [2, 1^{n-2}]$ von S_n läuft und l die Anzahl der Fixpunkte von π' ist.

Der Rest dieses Unterkapitels beschäftigt sich mit dem Beweis des Theorems 3.2.2, der sich in zwei Teile gliedert. In Teil 1 soll für $m \leq \sqrt[3]{n}$ gezeigt werden, dass $\chi^\lambda(\pi') \leq \chi^\lambda(1)^{\frac{1}{2}}$ ist. Mit dieser Aussage lässt sich dann in Teil 2 der Summationsterm aus Korollar 3.2.4 weiter abschätzen. Sei dafür im folgenden $A = n - \lambda_1$ und $\lambda_1 \geq \|\lambda\|$ und die Partition $(\mu) = (\lambda_2, \dots, \lambda_h)$.

Beweis von Theorem 3.2.2:

TEIL 1:

Lemma 3.2.5

Sei $\pi \in S_n$ und sei m die Anzahl der Zyklen von π' . Dann gilt für jede irreduzible Darstellung λ von S_n

$$|\chi^\lambda(\pi')| \leq (2n)^{\frac{m}{2}}. \quad (3.8)$$

Beweis: siehe [LS04, S.568, Prop 2.12]. □

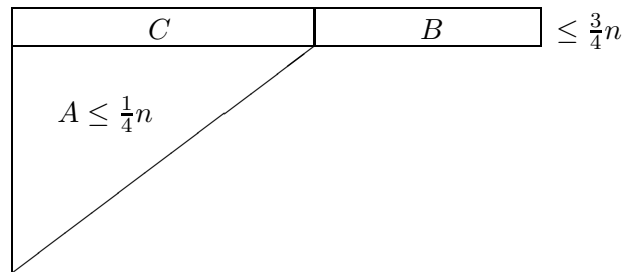
Es genügt also $\chi^\lambda(1)^{\frac{1}{2}} \geq (2n)^{\frac{3\sqrt{n}}{2}}$ zu zeigen.

Fall 1: $\lambda_1 \leq \frac{3}{4}n$

Mit Lemma 8 aus [MSP07] folgt $\chi^\lambda(1) \geq 2^{\frac{n}{8}}$. Und für n groß genug (ca. ab $n=790$) gilt $2^{\frac{n}{16}} \geq (2n)^{\frac{3\sqrt{n}}{2}}$.

Fall 2: $\lambda_1 \geq \frac{3}{4}n$ und $A > \sqrt{n}$

Für diesen Fall betrachte man das zu der Partition $(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$ gehörige Diagramm



wobei A die Zeilen λ_2 bis λ_h darstellen soll. Für $\chi^\lambda(1)$ gilt nach Formel (2.4):

$$\begin{aligned}
|\chi^\lambda(1)| &= \# \text{Abbaumöglichkeiten, so dass stets } \lambda_i \geq \lambda_j \ \forall i \geq j \text{ gilt} \\
&\geq \# \text{Abbaumöglichkeiten, so dass B am Schluss abgebaut wird} \\
&\geq \# \text{ der Möglichkeiten A Boxen aus A+B zu wählen} \\
&= \binom{A+B}{A} \\
&\geq \binom{A+\frac{1}{2}n}{A} \\
&\geq \left(\frac{\frac{1}{2}n}{A}\right)^A \geq 2^A
\end{aligned}$$

Ist nun $A > \sqrt{n}$ so folgt $\chi^\lambda(1) \geq 2^{\sqrt{n}}$ und für n groß genug (ca. ab $n=8.24 \cdot 10^8$) gilt $\sqrt{2^{\sqrt{n}}} \geq (2n)^{\frac{\sqrt[3]{n}}{2}}$.

Fall 3: $\lambda_1 \geq \frac{3}{4}n$ und $2\sqrt[3]{n} < A < \sqrt{n}$

Für $A < \sqrt{n}$ ist

$$\begin{aligned}
\chi^\lambda(1) &\geq \left(\frac{\frac{1}{2}n}{A}\right)^A = \left(\frac{\frac{1}{2}n}{A}\right)^A \text{ mit } A > 2\sqrt[3]{n} \text{ folgt dann} \\
\chi^\lambda(1) &\geq \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^{2\sqrt[3]{n}} \text{ und für } n > 44 \text{ gilt } \sqrt{2^{\sqrt{n}}} \geq (2n)^{\frac{\sqrt[3]{n}}{2}}.
\end{aligned}$$

Fall 4: $\lambda_1 \geq \frac{3}{4}n$ und $4 < A < 2\sqrt[3]{n}$

In diesem Fall lässt sich $\chi^\lambda(1)^{\frac{1}{2}} \geq \chi^\lambda(\pi')$ nicht durch das Abschätzen von $\chi^\lambda(1)$ erreichen. Es gilt also $\chi^\lambda(\pi')$ mit $m \leq \sqrt[3]{n}$ besser abzuschätzen. Sei dafür $\pi' = c_1 \cdots c_m$, c_i Zykel von π' . So gilt nach Formel 2.4

$$\begin{aligned}
|\chi^\lambda(\pi')| &\leq \# \text{Abbaumöglichkeiten durch die Zykel } c_i \\
&= \sum_{I \subset \{1, \dots, m\}} \# \text{Abbaumöglichkeiten mit } c_i \text{ ganz in } [\mu] \Leftrightarrow i \in I \\
&\leq \binom{k}{n - \lambda_1} \chi^\mu(1) \leq \binom{\sqrt[3]{n}}{n - \lambda_1} \chi^\mu(1)
\end{aligned}$$

Für $|\chi^\lambda(1)|$ gilt nach [MSP07, Lemma 8 (ii)]

$$\begin{aligned}
|\chi^\lambda(1)| &\geq \binom{\lambda_1}{n-\lambda_1} \chi^\mu(1) \\
&= \binom{2\lambda_1 - n + n - \lambda_1}{n-\lambda_1} \chi^\mu(1) \\
&\geq \left(\frac{2\lambda_1 - 4}{n-\lambda_1}\right)^{n-\lambda_1} \chi^\mu(1) \\
&\geq \left(\frac{n/2}{2\sqrt[3]{n}}\right)^{n-\lambda_1} \chi^\mu(1) = \left(\frac{n^{\frac{2}{3}}}{4}\right)^{n-\lambda_1} \chi^\mu(1)
\end{aligned}$$

BEHAUPTUNG: $\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{n-\lambda_1}\right)^2 \chi^\mu(1)^2 \leq \left(\frac{n^{\frac{2}{3}}}{4}\right)^{n-\lambda_1} \chi^\mu(1)$

Es gilt $\chi^\mu(1) \leq (n-\lambda_1)!^{\frac{1}{2}}$ und $\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{n-\lambda_1}\right)^2 \leq \frac{((n^{\frac{1}{3}})^{(n-\lambda_1)})^2}{(n-\lambda_1)!^2} = \frac{(n^{\frac{2}{3}})^{(n-\lambda_1)}}{(n-\lambda_1)!^2}$, das heißt die Behauptung gilt, da

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n-\lambda_1)!^{\frac{3}{2}}} &\leq \frac{1}{4^{n-\lambda_1}} \\
\Leftrightarrow 4^{n-\lambda_1} &\leq (n-\lambda_1)!^{\frac{3}{2}} \\
\Leftrightarrow 4^A &\leq A!^{\frac{3}{2}} \\
\Leftrightarrow 4 &\leq A
\end{aligned}$$

Fall 5: $\lambda_1 \geq \frac{3}{4}n$ und $A < 2\sqrt[3]{n}, A < 4$

Dieser Fall verwendet die Theorie der Charakterpolynome, die in [Ker99, Kapitel 6.2] und in [Spe60] nachzulesen ist. Sie besagt, dass falls $\pi' \in S_n$ i -Zykel besitzt, so gilt für das Charakterpolynom P :

$$\begin{aligned}
P(z_1, \dots, z_n) &< c \left(\sum_{i=1}^n z_i\right)^{n-\lambda_1} \\
&< c(\sqrt[3]{n})^{n-\lambda_1}
\end{aligned}$$

und $P(z_1, \dots, z_n) = \chi^\lambda(\pi')$.

Daraus ergibt sich $\chi^\lambda(\pi')^2 < c^2((\sqrt[3]{n})^2)^{n-\lambda_1}$. Für $\chi^\lambda(1)$ gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned}
\chi^\lambda(1) &\geq \binom{\lambda_1}{n-\lambda_1} = \binom{2\lambda_1 - n + n - \lambda_1}{n-\lambda_1} \geq \left(\frac{2\lambda_1 - n}{n-\lambda_1}\right)^{n-\lambda_1} \\
&= \left(\frac{n-2A}{A}\right)^A > \left(\frac{n-80}{4}\right)^A = \left(\frac{n}{4} - 2\right)^A
\end{aligned}$$

BEHAUPTUNG: $c^2((\sqrt[3]{n})^2)^{n-\lambda_1} \leq \left(\frac{n}{4} - 2\right)^{n-\lambda_1}$

Die Behauptung gilt, da

$$\begin{aligned} c'(\sqrt[3]{n})^2 &\leq \frac{n}{4} - 2 \\ \Leftrightarrow c'n^{\frac{2}{3}} + 2 &\leq \frac{n}{4} \\ \Leftrightarrow 4c'n^{\frac{2}{3}} + 8 &\leq n. \end{aligned}$$

Diese letzte Zeile gilt für n abhängig von c' groß genug gewählt. ($c' = 1 \Rightarrow n \geq 86, c' = 2 \Rightarrow n \geq 536, c' = 3 \Rightarrow n \geq 1752$)

Somit gilt in allen fünf Fällen $\chi^\lambda(1)^{\frac{1}{2}} \geq \chi^\lambda(\pi')$.

TEIL 2:

Mit der in Teil 1 gezeigten Ungleichung erhält man für den Summationsterm $\sum_\lambda \frac{\chi^\lambda(\pi')}{\chi^\lambda(1)}$ in (3.7) die folgende Abschätzung:

$$\sum_\lambda \frac{\chi^\lambda(\pi')}{\chi^\lambda(1)} \leq \sum_\lambda \frac{\chi^\lambda(1)^{\frac{1}{2}}}{\chi^\lambda(1)} = \sum_\lambda \frac{1}{\chi^\lambda(1)^{\frac{1}{2}}}$$

Mit Formel (2.6) aus Satz 2.2.11 erhält man, da die Summation über alle irreduziblen Darstellungen λ mit $\lambda \neq [n], [1^n], [n-1, 1], [2, 1^{n-2}]$ läuft:

$$\sum_\lambda \frac{1}{\chi^\lambda(1)^{\frac{1}{2}}} = \mathcal{O}(n^{-2 \cdot \frac{1}{2}}) = \mathcal{O}(n^{-1}).$$

Hieraus folgt nun die Aussage des Theorems, denn nach (3.7) gilt

$$\begin{aligned} P(\sigma\tau = \pi) &= \frac{1}{n!^4}((1 + \text{sgn}(\pi'))(1 + \frac{l-1}{n-1}) + \mathcal{O}(n^{-1})) \\ &= \frac{1}{n!^4}(1 + \text{sgn}(\pi') + \mathcal{O}(\frac{l}{n-1})) \\ &= \frac{1}{n!^4}(1 + \text{sgn}(\pi') + \mathcal{O}(n^{-\frac{2}{3}})). \end{aligned}$$

□

Für die Verteilung der Eckenanzahl ergibt sich nun folgendes:

$$\begin{aligned} P(\#\text{Ecken} \leq k) &= \sum_{s \leq k} P(\#\text{Ecken} = s) \\ &= \sum_{s \leq k} \sum_{\pi: \pi' \text{ hat } s \text{ Zykel}} \frac{1}{n!^4}(1 + \text{sgn}(\pi') + \mathcal{O}(n^{-\frac{2}{3}})) + \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{3}}) \quad (3.9) \end{aligned}$$

Der letzte Term ergibt sich leicht durch die Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(\sigma\tau = \pi)$, für $m \geq \sqrt[3]{n}$. Verwendet wird hierfür die Gleichung $P(\pi \text{ hat } k \text{ Zykel} | \pi = \sigma\tau) = (1 + \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{3}}))P(\pi \text{ hat } k \text{ Zykel} | U)$, wobei U die Gleichverteilung ist.

3.3 Verteilung des Geschlechts

Theorem 3.3.1

Sei X die Zufallsvariable, die jedem zufällig gewählten Origami das Geschlecht g zuordnet, E_n der Erwartungswert und σ_n die Standardabweichung der Zufallsvariablen X , so erhält man für σ_n und E_n die folgenden Werte

$$E_n = -\frac{1}{2}(\log n + \gamma + o(1)) + 1 + \frac{1}{2}n$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sqrt{\log n} - (\frac{\pi^2}{12} - \frac{\gamma}{2})\frac{1}{\sqrt{\log n}} + o(\frac{1}{\sqrt{\log n}}))$$

wobei γ die Eulerkonstante ist und die Zufallsvariable X ist normalverteilt.

Beweis: Nach Gleichung (3.9) gilt

$$P(\#Ecken \leq k) = \frac{1}{n!^4} \sum_{s \leq k} \sum_{\pi: \pi' \text{ hat } s \text{ Zykel} \atop s \leq \sqrt[3]{n}} (1 + \text{sgn}(\pi') + \mathcal{O}(n^{-\frac{2}{3}})) + \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{3}}).$$

Es wird jetzt der zweite Summand nach dem Kriterium $\pi \in A_n$ oder $\pi \in S_n \setminus A_n$ gesplittet, um danach diese beiden Teilsummen genauer zu betrachten.

$$\sum_{\pi: \pi' \text{ hat } s \text{ Zykel} \atop s \leq \sqrt[3]{n}} 1 + \text{sgn}(\pi') + \mathcal{O}(n^{-\frac{2}{3}}) = \underbrace{\sum_{\pi: \pi' \text{ hat } s \text{ Zykel} \atop s \leq \sqrt[3]{n}, \pi' \in S_n}}_A + \underbrace{\sum_{\pi: \pi' \text{ hat } s \text{ Zykel} \atop s \leq \sqrt[3]{n}, \pi' \in S_n \setminus A_n}}_B \mathcal{O}(n^{-\frac{2}{3}})$$

Die Summen A und B lassen sich wie folgt darstellen, dabei sei daran erinnert, dass $\pi' = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 \circ \pi_4$, $\pi_i \in S_n \forall i$ ist.

$$A = \left(\frac{1}{2} n! n! n! \left[\underbrace{\# \left\{ \pi_4 \in A_n \mid \pi' \text{ hat } s \text{ Zykel} \right\}}_{\alpha} + \underbrace{\# \left\{ \pi_4 \in S_n \setminus A_n \mid \pi' \text{ hat } s \text{ Zykel} \right\}}_{\beta} \right] \right)$$

$$B = \left(\frac{1}{2} n! n! n! \left[\# \alpha + \# \beta \right] \right)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} P(\#Ecken \leq k) &= \frac{1}{n!^4} (2 + \mathcal{O}(n^{-\frac{2}{3}})) \sum_{s \leq k} A + \frac{1}{n!^4} \mathcal{O}(n^{-\frac{2}{3}}) \sum_{s \leq k} B + \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{3}}) \\ &= \frac{1}{2} \left(2 + \mathcal{O}(n^{-\frac{2}{3}}) \right) \left(\sum_{s \leq k} \frac{1}{n!} \left[\# \alpha + \# \beta \right] \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathcal{O}(n^{-\frac{2}{3}}) \left(\sum_{s \leq k} \frac{1}{n!} \left[\# \alpha + \# \beta \right] \right) + \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{3}}) \end{aligned}$$

Nach Theorem 2.2.12 gilt, dass die Anzahl $M_{(n)}$ der Zyklen einer Permutation normalverteilt ist. Die Normalverteilung wird hier mit $\mathcal{N}(E_n, \sigma_n^2)$ bezeichnet. Somit ergibt sich für die Verteilung der Eckenanzahl

$$\begin{aligned} P(\# \text{Ecken} \leq k) &= \left(1 + \frac{1}{2}\mathcal{O}(n^{-\frac{2}{3}})\right) \left[\frac{1}{2}\mathcal{N}(E_n, \sigma_n^2) + \frac{1}{2}\mathcal{N}(E_n, \sigma_n^2)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathcal{O}(n^{-\frac{2}{3}}) \left[\frac{1}{2}\mathcal{N}(E_n, \sigma_n^2) + \frac{1}{2}\mathcal{N}(E_n, \sigma_n^2)\right] + \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{3}}) \\ &= \mathcal{N}(E_n, \sigma_n^2) + \mathcal{O}(n^{-\frac{2}{3}})\mathcal{N}(E_n, \sigma_n^2) + \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{3}}) \end{aligned}$$

Sei Y die Zufallsvariable, die jeder Verklebungsvorschrift die daraus resultierende Anzahl der Ecken zuordnet, so besteht zwischen der Zufallsvariablen Y und der Zufallsvariablen X die Beziehung:

$$X = \frac{1}{2}(-Y + 2 + K - F) = -\frac{1}{2}Y + 1 + \frac{1}{2}n$$

Das heißt X ergibt sich aus Y durch lineare Transformation. Für den Erwartungswert von X gilt dann

$$E(X) = -\frac{1}{2}E(Y) + 1 + \frac{1}{2}n$$

und für die Standardabweichung gilt

$$\sigma_X = \text{Var}(X)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \text{Var}(Y)\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sigma_Y.$$

Mit Theorem 2.2.12 folgt somit die Aussage von Theorem 3.3.1. \square

3.4 Charakterberechnung für Elemente aus $H \wr S_n$

Das wesentliche Resultat dieses Unterkapitels wird sein, die Charakterwerte für Elemente $(h; f)$ aus $H \wr S_n$ mit der Eigenschaft, dass die Elemente $f_i \in S_n$ r -Zyklen sind, abzuschätzen. Diese Abschätzung wird nach (2.13) zurückgeführt auf die Abschätzung von χ^λ , wobei $[\lambda]$ irreduzible Darstellung von S_n ist. Hierfür wird zunächst das für die Abschätzung der Charakterwerte χ^λ wesentliche Theorem von Fomin und Lulov angegeben.

Theorem 3.4.1

Sei r eine fixe ganze Zahl ≥ 2 , n durch r teilbar, $n=mr$, und sei $\pi \in S_n$ eine Permutation vom Zykeltyp (r^m) . Dann gilt für alle irreduziblen Darstellungen $[\lambda]$

$$|\chi^\lambda(\pi)| \leq \frac{m!}{(n!)^{\frac{1}{r}}} \cdot \chi^\lambda(1)^{\frac{1}{r}} \leq c \cdot n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \cdot \chi^\lambda(1)^{\frac{1}{r}}, \quad (3.10)$$

wobei c nur von r abhängt.

Beweis: siehe [FL95]. \square

Wie man später im Beweis von Theorem 3.4.3 sehen wird, lässt sich obiges Theorem im allgemeinen Fall, das heißt $h \in H$ beliebig gewählt, nicht anwenden. Man benötigt dazu eine Abschätzung für Elemente des Zykeltyps $(1^b, r^m)$, die sich jedoch aus Theorem 3.4.1 und der Murnaghan-Nakayama Formel gewinnen lässt.

Lemma 3.4.2

Sei $\pi \in S_n$ vom Zykeltyp $(1^b, r^m)$, dann gilt für alle irreduziblen Darstellungen λ von S_n

$$|\chi^\lambda(\pi)| \leq c \cdot (2n)^{\frac{1}{2}(b+1)} \cdot \chi^\lambda(1)^{\frac{1}{r}}, \quad (3.11)$$

wobei c nur von r abhängt.

Beweis: siehe [LS04, S.568, Prop 2.12]. □

Theorem 3.4.3

Sei H eine Permutationsgruppe auf der Menge Ω mit $|\Omega| = k$, S_n die symmetrische Gruppe und sei $(h; f) \in H \wr S_n$ von der Form $(h; f_1, \dots, f_k)$, wobei die Elemente $f_i \in S_n$ r -Zykel sind und h vom Zykeltyp $Th = (a_1, \dots, a_k)$ ist. Dann gilt für alle $D = D' \otimes \widetilde{\lambda^*} \in \text{Irr}(H \wr S_n)$

$$|\chi^D(h; f)| \leq \chi^{D''}(h) \cdot c^{\sum_{i=1}^k a_i} \cdot (2n)^{\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^k b_i a_i + a)} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{\nu=1}^{a_{i+1}} \chi^{\lambda_{j_{\sum_{l=0}^i a_l + \nu}}}(1)^{\frac{1}{r}},$$

wobei c nur von r abhängt.

Beweis: Nach (2.13) gilt

$$\begin{aligned} \chi^{D' \otimes \widetilde{D^*}}(h; f) &= \chi^{D''}(h) \prod_{\nu=1}^{\sum a_i} \chi^{\lambda_{j_\nu}}(g_\nu(h; f)) \\ &= \chi^{D''}(h) \chi^{\lambda_{j_1}}(\sigma_{1,1}) \cdots \chi^{\lambda_{j_{a_1}}}(\sigma_{1,a_1}) \cdot \chi^{\lambda_{j_{a_1+1}}}(\sigma_{2,1}) \cdots \chi^{\lambda_{j_{a_1+a_2}}}(\sigma_{2,a_2}) \cdots \\ &\quad \cdot \chi^{\lambda_{j_{\sum_{i=1}^{k-1} a_i}}}(\sigma_{k,1}) \cdots \chi^{\lambda_{j_{\sum a_i}}}(\sigma_{k,a_k}) \\ &= \chi^{D''}(h) \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{\nu=1}^{a_{i+1}} \chi^{\lambda_{j_{\sum_{l=0}^i a_l + \nu}}}(\sigma_{i,\nu}), \end{aligned}$$

wobei die Elemente $\sigma_{i,\nu} \in S_n$ vom Zykeltyp $(1^{b_i}, r^i)$ sind und $a_0 := 0$ ist.

Wendet man Lemma 3.4.2 auf die Charaktere $\chi^{\lambda_{j_s}}$, $s = \sum_{l=0}^i a_l + \nu$, an, dann folgt

$$\begin{aligned} \chi^{D' \otimes \widetilde{D^*}}(h; f) &\leq \chi^{D''}(h) \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{\nu=1}^{a_{i+1}} \cdot c \cdot (2n)^{\frac{1}{2}(b_i+1)} \chi^{\lambda_{j_s}}(1)^{\frac{1}{r}} \\ &= \chi^{D''}(h) \prod_{i=0}^{k-1} \cdot c^{a_{i+1}} \cdot (2n)^{\frac{1}{2}(b_i+1)a_{i+1}} \prod_{\nu=1}^{a_{i+1}} \chi^{\lambda_{j_s}}(1)^{\frac{1}{r}} \\ &= \chi^{D''}(h) c^{\sum a_i} \cdot (2n)^{\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^k b_i a_i + \sum a_i)} \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{\nu=1}^{a_{i+1}} \chi^{\lambda_{j_s}}(1)^{\frac{1}{r}}. \quad \square \end{aligned}$$

Korollar 3.4.4

Unter den Voraussetzungen des Theorem 3.4.3 gilt

$$\chi^{D' \otimes \widetilde{D}^*}(h; f) \leq c^k \cdot (2n)^{\frac{k}{2}(n-r+1)} \cdot \chi^{D''}(1)^{\frac{r-1}{r}} \cdot \chi^D(1)^{\frac{1}{r}}.$$

Beweis: Es gilt $\sum_{i=1}^k a_i \leq k$, $\sum_{i=1}^k i \cdot a_i = k$ und $b_i = n - i \cdot r$, es ergibt sich somit die Abschätzung

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k b_i a_i + a \right) \leq \frac{k}{2} (n - r + 1).$$

Nach Gleichung (2.13) gilt für $\chi^D(1)$,

$$\chi^D(1_H; e) = \chi^{D''}(1) \prod_{\nu=1}^k \chi^{\lambda_{j_\nu}}(1),$$

woraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{\nu=1}^{a_{i+1}} \chi^{\lambda_{j_{\sum_{l=0}^i a_l + \nu}}}(1)^{\frac{1}{r}} &\leq \prod_{\nu=1}^k \chi^{\lambda_{j_\nu}}(1)^{\frac{1}{r}} \\ &= \frac{\chi^D(1)^{\frac{1}{r}}}{\chi^{D''}(1)^{\frac{1}{r}}}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \chi^{D' \otimes \widetilde{D}^*}(h; f) &\leq \chi^{D''}(h) \cdot c^k \cdot (2n)^{\frac{k}{2}(n-r+1)} \cdot \frac{\chi^D(1)^{\frac{1}{r}}}{\chi^{D''}(1)^{\frac{1}{r}}} \\ &\leq c^k \cdot (2n)^{\frac{k}{2}(n-r+1)} \cdot \chi^{D''}(1)^{\frac{r-1}{r}} \cdot \chi^D(1)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

□

Kapitel 4

Origamis in der Forschung

Dieses Kapitel soll eine kurze Einführung der Begriffe Translationsstruktur, Teichmüller Kurve im Modulraum und Veech Gruppe geben, da sich die Origami-Forschung vorwiegend mit Origamis als Teichmüller Kurven beschäftigt. Dafür werden auch die in 1.1 angeführten Beschreibungen von Origamis explizit angegeben. Die Einführung geht vor allem auf die Arbeiten der Forschungsgruppe der Universität Karlsruhe zurück. Diese beschäftigt sich schon seit einigen Jahren mit Origamis und arbeitet seit Sommer 2007 unter dem Forschungsprojekt “Mit Origamis zu Teichmüllerkurven im Modulraum“. Andere Autoren untersuchen Origamis unter dem Namen “square tiled surfaces“, die zur allgemeineren Gruppe der “flat surfaces“ gehören. Diese Gruppe wird schon seit längerer Zeit in den Teilgebieten der algebraischen Geometrie, der komplexen Analysis und der dynamischen Systeme untersucht.

Die in den nächsten beiden Kapiteln verwendeten Grundlagen der Überlagerungstheorie können zum Beispiel in [SZ88] nachgelesen werden.

4.1 Origamis als Überlagerungen des Torus

Sei X die zusammenhängende und abgeschlossene Fläche aus Definition 1.1.1 und T der durch das Origami O_0 entstehende Torus, so existiert eine natürliche Abbildung $X \rightarrow T$, indem man jedes Einheitsquadrat des Origami O auf das Einheitsquadrat des Origami O_0 abbildet. Diese Abbildung ist eine Überlagerung, die außer über dem Eckpunkt P unver-

zweigt ist. Umgekehrt erhält man zu jeder Abbildung $p : X \rightarrow T$ einer abgeschlossenen Fläche X , eine Zerlegung von X in Quadrate mittels Zerschneidung von X entlang der Urbilder der Ecken des Origami O_0 .

Definition 4.1.1.1

Ein *Origami* O vom Geschlecht $g \geq 1$ und vom Grad n ist eine Überlagerung $p : X \rightarrow T$ einer abgeschlossenen, orientierten Fläche X vom Geschlecht g in den Torus T , die nur über einem Punkt $P \in T$ verzweigt.

Definition 4.1.1.2

Zwei Origamis $O_1 = (p_1 : X_1 \rightarrow T)$ und $O_2 = (p_2 : X_2 \rightarrow T)$ heißen *äquivalent*, falls ein Homeomorphismus $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ existiert, so dass $p_1 = p_2 \circ \varphi$ gilt.

4.2 Origamis als Untergruppe der freien Gruppe \mathbb{F}_2 mit endlichem Index

Sei $O = (p : X \rightarrow T)$ ein Origami. Sei $T^* = T - P$ und $X^* = X - p^{-1}(P)$, dann ist $p : X^* \rightarrow T^*$ eine unverzweigte Überlagerung. Dies führt zu einer Einbettung der korrespondierenden Fundamentalgruppen:

$$U = \pi_1(X^*) \subseteq \pi_1(T^*) \cong \mathbb{F}_2.$$

Dabei erhält man den fixierten Isomorphismus $\pi_1(T^*) \cong \mathbb{F}_2$, indem man M als Mittelpunkt von T und die einfache abgeschlossene horizontale bzw. vertikale Kurve durch M als Erzeuger der Fundamentalgruppe $\pi_1(T^*, M)$ festlegt. \mathbb{F}_2 ist dabei die freie Gruppe mit den zwei Erzeugern x und y , siehe Abbildung 5.

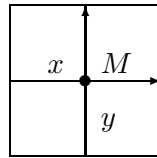


Abb.5: Erzeuger von $\pi_1(T^*)$.

Wählt man ein zu O äquivalentes Origami, so führt dies zu einer Konjugation von U mit einem Element aus \mathbb{F}_2 . Der Index der Untergruppe von \mathbb{F}_2 ist der Grad n der Überlagerung p . Ist andererseits eine Untergruppe U von endlichem Index von \mathbb{F}_2 gegeben, so

erhält man wie folgt mit dem Theorem der universellen Überlagerung eine Überlagerung $X \rightarrow T$.

Sei $q : \tilde{T}^* \rightarrow T^*$ die universelle Überlagerung von T^* , so ist nach dem Theorem der universellen Überlagerung $\pi_1(T^*)$ isomorph zu $\text{Deck}(\tilde{T}^*/T^*)$, der Gruppe der Decktransformationen von \tilde{T}^*/T^* , und jede Untergruppe $U \subseteq \text{Deck}(\tilde{T}^*/T^*)$ von endlichem Index korrespondiert mit einer unverzweigten Überlagerung $p : \tilde{X}^* \rightarrow T^*$ von endlichem Grad. Diese kann zu einer Überlagerung $X \rightarrow T$, wobei X eine abgeschlossene Fläche ist, erweitert werden. Daraus folgt die 1-1 Korrespondenz:

$$\begin{array}{ccc} \text{Origamis} & \leftrightarrow & \text{Untergruppe von } \mathbb{F}_2 \text{ von endlichem Index} \\ \text{bis auf Isomorphismus} & & \text{bis auf Konjugation.} \end{array}$$

4.3 Translationsstruktur, Teichmüller Kurve im Modulraum und Veech Gruppe

4.3.1 Translationsstruktur

Ein Origami $O = (p : X \rightarrow T)$ definiert auf natürliche Weise eine $SL_2(\mathbb{R})$ -Familie von Translationsstrukturen μ_A , $A \in SL_2(\mathbb{R})$, auf X^* . Dabei heißt eine Struktur, d.h. eine durch einen Atlas bestimmte Äquivalenzklasse, *Translationsstruktur*, falls alle Kartenübergänge des Atlas Translationen sind.

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, so definiert diese Matrix eine Translationsstruktur η_A auf dem

Torus T , indem dieser mit \mathbb{C}/Λ_A identifiziert wird; dabei ist Λ_A das Gitter $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right\rangle$ in \mathbb{C} . Die Translationsstruktur μ_A auf X^* ist dann die Hochhebung der Translationsstruktur η_A durch p , d.h. $\mu_A = p^* \eta_A$.

Die anfängliche Beschreibung von Origamis durch Verklebung der Kanten ergibt die Translationsstruktur μ_I , I Einheitsmatrix, indem man die Quadrate mit dem euklidischen Einheitsquadrat in \mathbb{C} identifiziert. Für eine beliebige Matrix $A \in SL_2(\mathbb{R})$ erhält man μ_A durch die Identifikation der Quadrate mit dem Parallelogramm, das durch die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

4.3.2 Teichmüller Kurve im Modulraum

Der *Modulraum* M_g einer abgeschlossenen Riemannschen Fläche R vom Geschlecht g ist der Quotient $T_g/Mod(R)$. T_g ist der Teichmüller Raum von R und $Mod(R)$ die Menge der Homotopieklassen $[\omega]$, der orientierungserhaltenden Diffeomorphismen $\omega : R \rightarrow R$.

Die hier verwendeten Begriffe, speziell der des Teichmüller Raums und der unten verwendete Begriff der Markierung, können zum Beispiel in [IT92, S.14] nachgelesen werden.

Ein Origami $O = (p : X \rightarrow T)$ definiert eine *Teichmüller Kurve im Modulraum* M_g einer abgeschlossenen Riemannschen Fläche vom Geschlecht g .

Betrachte dazu die oben konstruierte Translationsstruktur μ_A auf X^* . Diese kann auf die abgeschlossene Fläche X erweitert werden. Die Riemannsche Fläche (X, μ_A) zusammen mit der Identitätsabbildung als Markierung definiert dann einen Punkt im Teichmüller Raum T_g , so dass man die folgende Abbildung erhält:

$$\hat{i} : SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow T_g, \quad A \mapsto [(X, \mu_A), id].$$

Falls $A \in SO_2(\mathbb{R})$, so ist die affine Abbildung $z \mapsto A \cdot z$ holomorph und die Abbildung \hat{i} faktorisiert über $SO_2(\mathbb{R})$. Verwendet man weiter, dass $SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{H}$, so erhält man die Abbildung

$$\iota : \mathbb{H} \rightarrow T_g.$$

Das Bild Δ dieser holomorphen und isometrischen *Teichmüller Einbettung* heißt *Teichmüllerkreisscheibe* oder *Geodätische*. Betrachtet man das Bild solch einer Teichmüllerkreisscheibe unter der Projektion π von T_g auf den Modulraum M_g , so ist dies eine komplexe algebraische Kurve und alle Kurven in M_g , die als Bilder von Teichmüllerkreisscheiben auftreten, nennt man *Teichmüller Kurven*. Betrachtet man die zu einem Origami O gehörige komplexe Geodätische Δ , so heißt $\pi(\Delta)$ *Origamikurve*.

4.3.3 Veech Gruppe

Sei X^* zusammenhängende Fläche und μ Translationsstruktur auf X^* , so lässt sich eine dazugehörige Untergruppe von $GL_2(\mathbb{R})$ bestimmen. Diese nennt man *Veech Gruppe*.

Dazu sei

$$Aff^+(X^*, \mu) := \{f : X^* \rightarrow X^* \mid f \text{ orientierungserhaltender affiner Diffeomorphismus}\},$$

wobei der affine Diffeomorphismus $f \in Aff^+(X^*, \mu)$ lokal gegeben ist durch die Abbildung $z \mapsto A \cdot z + b$ mit $A \in SL_2(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^2$. A hängt dabei nur von f ab und ist unabhängig von der Wahl der Karten, so dass man die wohldefinierte Abbildung

$$D : Aff^+(X^*, \mu) \rightarrow SL_2(\mathbb{R}), \quad f \mapsto A$$

erhält. Diese nennt man *Derivationsabbildung*. Die Veech Gruppe $\Gamma(X^*, \mu)$ der Translationsfläche (X^*, μ) ist dann das Bild der Derivationsabbildung D :

$$\Gamma(X^*, \mu) = D(Aff^+(X^*, \mu))$$

Sei nun $O = (p : X \rightarrow T)$ ein Origami und μ_A die durch O definierte $SL_2(\mathbb{R})$ -Familie von Translationsstrukturen auf X^* , so sind die dazugehörigen Veech Gruppen konjugiert, d.h. $\Gamma(X^*, \mu_A) = A\Gamma(X^*, \mu_I)A^{-1}$. Die Veech Gruppe $\Gamma(O)$ eines Origamis O ist somit definiert durch $\Gamma(X^*, \mu_I)$.

Zum Schluss sei erwähnt, dass Gutkin und Judge in [GJ00] zeigten, dass eine Veech Gruppe genau dann Untergruppe von endlichem Index von $SL_2(\mathbb{Z})$ ist, wenn sie Veech Gruppe eines Origamis ist.

Literaturverzeichnis

- [Cli37] A. H. Clifford. Representations induced in an invariant subgroup. *Ann. of Math.* (2), 38(3):533–550, 1937.
- [CR90] Charles W. Curtis and Irving Reiner. *Methods of representation theory. Vol. I.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1990. With applications to finite groups and orders, Reprint of the 1981 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [Dix69] John D. Dixon. The probability of generating the symmetric group. *Math. Z.*, 110:199–205, 1969.
- [FL95] Sergey Fomin and Nathan Lulov. On the number of rim hook tableaux. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 223(Teor. Predstav. Din. Sistemy, Kombin. i Algoritm. Metody. I):219–226, 340, 1995.
- [GJ00] Eugene Gutkin and Chris Judge. Affine mappings of translation surfaces: geometry and arithmetic. *Duke Math. J.*, 103(2):191–213, 2000.
- [Gon44] V.L. Gončarov. Du domaine de l’analyse combinatoire. *Bull. Acad. Sci. URSS Sér. Math. [Izvestia Akad. Nauk SSSR]*, 8:3–48 (Russian. English translation: Translations of the AMS, Ser. 2, 19 (1962), 1–46.), 1944.
- [IT92] Y. Iwayoshi and M. Taniguchi. *An introduction to Teichmüller spaces.* Springer-Verlag, Tokyo, 1992. Translated and revised from the Japanese by the authors.
- [Jam78] G. D. James. *The representation theory of the symmetric groups*, volume 682 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, Berlin, 1978.
- [JK81] Gordon James and Adalbert Kerber. *The representation theory of the symmetric group*, volume 16 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981. With a foreword by P. M. Cohn, With an introduction by Gilbert de B. Robinson.

- [Ker75] Adalbert Kerber. *Representations of permutation groups. II*. Springer-Verlag, Berlin, 1975. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 495.
- [Ker99] Adalbert Kerber. *Applied finite group actions*, volume 19 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1999.
- [KL90] William M. Kantor and Alexander Lubotzky. The probability of generating a finite classical group. *Geom. Dedicata*, 36(1):67–87, 1990.
- [Loc05] Pierre Lochak. On arithmetic curves in the moduli spaces of curves. *J. Inst. Math. Jussieu*, 4(3):443–508, 2005.
- [LS95] Martin W. Liebeck and Aner Shalev. The probability of generating a finite simple group. *Geom. Dedicata*, 56(1):103–113, 1995.
- [LS04] Martin W. Liebeck and Aner Shalev. Fuchsian groups, coverings of Riemann surfaces, subgroup growth, random quotients and random walks. *J. Algebra*, 276(2):552–601, 2004.
- [Lul96] Nathan Anton Mikerin Lulov. *Random walks on the symmetric group generated by conjugacy classes*. PhD thesis, Cambridge, MA, USA, 1996. Adviser-Persi Diaconis.
- [MP02] Thomas W. Müller and Jan-Christoph Puchta. Character theory of symmetric groups and subgroup growth of surface groups. *J. London Math. Soc. (2)*, 66(3):623–640, 2002.
- [MSP07] Thomas W. Müller and Jan-Christoph Schlage-Puchta. Character theory of symmetric groups, subgroup growth of Fuchsian groups, and random walks. *Adv. Math.*, 213(2):919–982, 2007.
- [Mur37] F. D. Murnaghan. On the Representations of the Symmetric Group. *Amer. J. Math.*, 59(3):437–488, 1937.
- [Rob61] G. de B. Robinson. *Representation theory of the symmetric group*. Mathematical Expositions, No. 12. University of Toronto Press, Toronto, 1961.
- [Sch07] Gabriela Schmithüsen. Origamis with non congruence Veech groups. In *Proceedings of 34th Symposium on Transformation Groups*, pages 31–55. Wing Co., Wakayama, 2007.
- [Ser77] Jean-Pierre Serre. *Linear representations of finite groups*. Springer-Verlag, New York, 1977. Translated from the second French edition by Leonard L. Scott, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42.

- [Spe32] Wilhelm Specht. Eine Verallgemeinerung der symmetrischen gruppe. *Schriften Mathem. Sem. u. Inst. Angew. Math. Univ. Berlin*, 1:1–32, 1932.
- [Spe33] Wilhelm Specht. Eine Verallgemeinerung der Permutationsgruppen. *Math. Z.*, 37(1):321–341, 1933.
- [Spe60] Wilhelm Specht. Die Charaktere der symmetrischen Gruppe. *Math. Z.*, 73:312–329, 1960.
- [SZ88] Ralph Stöcker and Heiner Zieschang. *Algebraische Topologie*. Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, 1988. Eine Einführung. [An introduction].
- [Thu88] William P. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 19(2):417–431, 1988.
- [Vee89] W. A. Veech. Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Invent. Math.*, 97(3):553–583, 1989.
- [Wie64] Helmut Wielandt. *Finite permutation groups*. Translated from the German by R. Bercov. Academic Press, New York, 1964.
- [You52] Alfred Young. On quantitative substitutional analysis. *Proc. London Math. Soc. (1)*, (I) 33:97–146 (1901); (II) 34:361–397 (1902), *Proc. London Math. Soc. (1)*, (III) 28:255–292 (1928); (IV) 31:253–272 (1930); (V) 31:273–288 (1930); (VI) 34:196–230 (1932); (VII) 36:304–368 (1933); (VIII) 37:441–495 (1934); (IX) 54:219–253 (1952).